

NOTA BENE.

Questi appunti non sono esaustivi, non contengono tutto ciò che è stato detto a lezione/esercitazione; costituiscono una base minima di conoscenze necessarie a superare l'esame e possono essere utili per un ripasso veloce. Questi appunti contengono tuttavia le dimostrazioni richieste all'orale.

Algebra delle matrici.

(vedi Capitolo 3 dello Schlesinger e/o Capitolo 3 del Bernardi-Gimigliano)

Una *matrice A di tipo (m,n)* (o $m \times n$) su un campo K è una tabella di mn elementi di K disposti su m righe ed n colonne. Indichiamo in genere con a_{ij} con $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, l'elemento di K che appartiene alla i -esima riga e alla j -esima colonna di A . Quindi scriviamo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

Una matrice si dice *vettore riga* se $m=1$, *vettore colonna* se $n=1$.

La matrice A si può quindi vedere come l'accostamento $[\underline{c}_1 \quad \cdots \quad \underline{c}_n]$ degli n vettori colonna

$\underline{c}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ di tipo $(m,1)$ o come l'accostamento $\begin{bmatrix} \underline{r}_1 \\ \vdots \\ \underline{r}_m \end{bmatrix}$ degli m vettori riga $\underline{r}_j = [a_{j1} \quad \cdots \quad a_{jn}]$ di tipo $(1,n)$.

Due matrici $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ si dicono *uguali* se sono dello stesso tipo e per ogni posto (i,j) $a_{ij} = b_{ij}$.

Date due matrici $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ dello stesso tipo (m,n) si chiama *somma* delle due matrici la matrice $C = [c_{ij}]$ di tipo (m,n) dove $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

E' immediato verificare che la somma di matrici gode delle proprietà:

- *commutativa*: $A+B=B+A$
- *associativa*: $A+(B+C)=(A+B)+C$
- esiste una matrice $\underline{0}_{(m,n)}$ (o anche $\underline{0}_{m \times n}$) di tipo (m,n) con tutti elementi nulli tale che per ogni matrice A di tipo (m,n) $A = A + \underline{0}_{(m,n)}$, tale matrice si dice *matrice nulla* di tipo (m,n)
- per ogni matrice A di tipo (m,n) esiste una matrice $-A$ di tipo (m,n) tale che $A+(-A) = \underline{0}_{(m,n)}$. (la matrice $-A$ è ovviamente la matrice i cui elementi sono gli opposti dei corrispondenti elementi di A . La matrice $-A$ si chiama *opposta* di A).

Data una matrice $A = [a_{ij}]$ di tipo (m,n) ed uno scalare k il *prodotto dello scalare k per la matrice A* è la matrice $kA = [ka_{ij}]$. Il prodotto di uno scalare per una matrice ha le seguenti proprietà

- per ogni coppia di scalari k, h e per ogni matrice A : $(k+h)A = kA + hA$ (NB. Il primo simbolo $+$ denota la somma di scalari mentre il secondo $+$ denota la somma di matrici)
- per ogni coppia di scalari k, h e per ogni A : $(kh)A = k(hA)$ (NB. Il prodotto kh è il prodotto di scalari gli altri sono i prodotti di uno scalare per una matrice)
- per ogni scalari k e per ogni coppia di matrici dello stesso tipo A e B : $k(A+B) = kA + kB$
- per ogni matrice A : $1A = A$ (dove 1 è l'unità del campo K).

Queste proprietà ci dicono che l'insieme $M_{(m,n)}(K)$ delle matrici di tipo (m,n) sul campo K formano uno spazio vettoriale sul campo K rispetto alle operazioni sopra definite. Valgono quindi le proprietà che avevamo già visto per gli spazi vettoriali.

- $A+B=A+C$ implica $B=C$
- $kA=0_{(m,n)}$ se e solo se vale almeno una delle due condizioni $k=0$, $A=0_{(m,n)}$.

Lo spazio vettoriale $M_{(m,n)}(K)$ ha dimensione mn e la sua base canonica è costituita dalle matrici E_i ($1 \leq i \leq mn$) che hanno l'elemento di posto (q,r) uguale ad 1 (dove q ed r sono quoziente e resto della divisione di i per n) e tutti i restanti elementi uguali a 0.

Terminologia e notazioni:

Una matrice si dice *quadrata di ordine* n se è di tipo (n,n) .

Data una matrice A di tipo (m,n) si chiama *trasposta* di A , e si indica con A_T (o con $A^T, {}^tA, A^t$), la matrice di tipo (n,m) che si ottiene da A scambiando le righe con le colonne; in altre parole l'elemento di posto (i,j) di A_T è a_{ji} .

Una matrice si dice *simmetrica* se $A = A_T$ ed *emisimmetrica* se $A = -A_T$. Una matrice simmetrica od emisimmetrica è necessariamente quadrata. Gli elementi principali di una matrice emisimmetrica sono tutti nulli, infatti si dovrebbe avere $a_{ii} = -a_{ii}$ e l'unico elemento di K uguale al suo opposto è lo 0.

Una matrice quadrata si dice *triangolare alta (bassa)* se $a_{ij} = 0$ per ogni $i > j$ ($i < j$), si dice *diagonale* se è quadrata e $a_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$, una matrice diagonale si scrive spesso nella forma $\text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, dove $\alpha_i = a_{ii}$. Gli elementi a_{ii} di una matrice quadrata A si chiamano *elementi diagonali* e la linea composta da questi elementi (che va dall'angolo in alto a sinistra all'angolo in basso a destra di A) si chiama *diagonale principale* di A . Una matrice è quindi diagonale se i suoi (eventuali) elementi non nulli stanno tutti sulla diagonale principale, è triangolare alta (bassa) se gli elementi sotto (sopra) la diagonale principale sono tutti 0. Una matrice quadrata in forma a scala è sempre triangolare alta, esistono invece matrici triangolari alte che non sono a scala.

Prodotto di matrici

Siano $A = [a_{ij}]$ una matrice di tipo (m,n) e $B = [b_{hk}]$ una matrice di tipo (n,p) allora possiamo definire una matrice $C = [c_{rs}]$ di tipo (m,p) nel modo seguente

$$c_{rs} = \sum_{i=1}^n a_{ri} b_{is} = a_{r1}b_{1s} + a_{r2}b_{2s} + \dots + a_{rn}b_{ns}$$

La matrice C si chiama *matrice prodotto* (righe per colonne) della matrice A per la matrice B .

L'elemento c_{rs} di C si ottiene facendo il prodotto (righe per colonne) delle r -esima riga di A con la s -esima colonna di B .

- *Il prodotto di matrici NON è commutativo.*

Per prima cosa notiamo che in genere può essere definito il prodotto AB e non il prodotto BA . Questo avviene se A è di tipo (m,n) , B di tipo (n,p) con $m \neq p$. Inoltre anche se $m=p$ e possono essere definiti sia AB sia BA , AB è quadrata di ordine m e BA è quadrata di ordine p , quindi le matrici sono diverse. Infine anche se $n=m=p$ e quindi AB e BA sono entrambe definite e quadrate di ordine n , ancora in generale si ha $AB \neq BA$: basta considerare $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, si ha $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

- Due matrici quadrate di ordine n si dicono *permutabili* se $AB=BA$.
- *Il prodotto di matrici è associativo* (quando è definito), in altre parole se A è una matrice di tipo (m,n) , B è una matrice di tipo (n,p) , C è una matrice di tipo (p,r) allora $A(BC)=(AB)C$. E' infatti immediato osservare che BC è di tipo (n,r) e quindi si può effettuare il prodotto $A(BC)$ e si ottiene una matrice (m,r) , AB è una matrice di tipo (m,p) e quindi si può effettuare il prodotto $(AB)C$ che è ancora una matrice di tipo (m,r) . Inoltre ponendo $AB=[d_{ik}]$, si ha $d_{ik} = \sum_{h=1}^n a_{ih} b_{hk}$ e ponendo $(AB)C=[e_{it}]$, si ha $e_{it} = \sum_{k=1}^p d_{ik} c_{kt} = \sum_{k=1}^p (\sum_{h=1}^n a_{ih} b_{hk}) c_{kt} = \sum_{h=1}^n a_{ih} (\sum_{k=1}^p b_{hk} c_{kt})$, ma $\sum_{k=1}^p b_{hk} c_{kt}$ è l'elemento di posto (h,t) del prodotto BC , quindi $\sum_{h=1}^n a_{ih} (\sum_{k=1}^p b_{hk} c_{kt})$ è l'elemento di posto (i,t) del prodotto $A(BC)$.
- Il fatto che il prodotto sia associativo permette di definire per ogni matrice quadrata e per ogni intero positivo h la *potenza* di A con esponente h ponendo $A^h = AA \dots A$ (h volte) e quindi di ricavare le proprietà formali delle potenze per le potenze ad esponente intero positivo di A :
 - $A^h A^k = A^{h+k}$ da cui si ricava che *potenze di una stessa matrice sono sempre permutabili*
 - $(A^h)^k = A^{hk}$
- Se A è una matrice di tipo (m,n) e B,C sono due matrici dello stesso tipo (n,p) allora vale la *proprietà distributiva (a sinistra) del prodotto rispetto alla somma*: $A(B+C) = AB + AC$. Infatti il generico elemento di posto (i,k) di $A(B+C)$ è $\sum_{h=1}^n a_{ih} (b_{hk} + c_{hk}) = \sum_{h=1}^n a_{ih} b_{hk} + \sum_{h=1}^n a_{ih} c_{hk}$ dove $\sum_{h=1}^n a_{ih} b_{hk}$ e $\sum_{h=1}^n a_{ih} c_{hk}$ sono gli elementi di posto (i,k) rispettivamente di AB e AC .
- Analogamente se A,B sono due matrici dello stesso tipo (m,n) e C è una matrice di tipo (n,p) allora vale la *proprietà distributiva (a destra) del prodotto rispetto alla somma*: $(A+B)C = AC + BC$.
- $(AB)^T = B^T A^T$ (ATTENTI all'ordine!).
- NON vale la proprietà di annullamento del prodotto.

Ovviamente se A è una matrice di tipo (m,n) e si considera $0_{(n,p)}$ si ha $A 0_{(n,p)} = 0_{(m,p)}$, ma esistono matrici non nulle il cui prodotto è la matrice nulla. Basta considerare $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, si ha $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Di conseguenza NON si può in generale semplificare una matrice non nulla: infatti se prendiamo A, B come prima, si ha $AB = A\underline{0}_{(2,2)}$ e $B \neq \underline{0}_{(2,2)}$.

- Sia $I_n = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$, I_n si dice *matrice identica di ordine n*.
- Per ogni matrice A di tipo (m, n) si ha $I_m A = A I_n = A$.
- Sia A una matrice quadrata di ordine n , per convenzione si pone $A^0 = I_n$ e si dimostra facilmente che le proprietà delle potenze valgono per ogni intero non negativo.

ATTENZIONE: E' facile quando si opera sulle matrici dimenticare che molte proprietà cui siamo abituati nel calcolo su numeri NON valgono e fare quindi operazioni non permesse.

A questo punto prima di procedere col calcolo matriciale (ri)guardare i sistemi lineari.

Matrice inversa

Definizione: Una matrice quadrata A di ordine n ammette

- ammette *inversa* (o è invertibile a) *sinistra* se esiste una matrice B tale che $BA = I_n$,
- ammette *inversa* (o è invertibile a) *destra* se esiste una matrice C tale che $AC = I_n$,
- ammette *inversa* (o è invertibile) se esiste una matrice chiamata A^{-1} tale che $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Ovviamente B, C, A^{-1} sono tutte matrici quadrate di ordine n .

Una matrice che ammette inversa si dice *invertibile* o *non singolare*.

Lemma (di unicità dell'inversa): Se una matrice A ammette inversa sinistra e inversa destra, queste coincidono e quindi la matrice è invertibile.

Dim: Siano B e C rispettivamente l'inversa sinistra e l'inversa destra di A . Da $BA = I_n$, moltiplicando a destra per C , otteniamo $(BA)C = I_n C$, da cui, per la proprietà associativa del prodotto, $B(AC) = I_n C$ e quindi, visto che C è inversa destra di A , $BI_n = I_n C$ e dunque $B = C$.

Come corollario si ottiene subito che *la matrice inversa di una matrice A se esiste è unica*.

Si hanno inoltre le seguenti immediate proprietà.

- Se A ammette inversa A^{-1} , l'inversa di A^{-1} è A
- Se A e B sono matrici quadrate dello stesso ordine che ammettono inversa allora AB ha inversa e tale inversa è $B^{-1}A^{-1}$. ATTENTI all'ordine!!

Teorema: Sia A una matrice quadrata di ordine n , sono equivalenti le seguenti condizioni:

1. A ammette inversa
2. A ammette inversa destra
3. A ammette inversa sinistra
4. $\ker A = \{0\}$ (ovvero l'unico vettore \underline{x} tale che $A\underline{x} = \underline{0}$ è il vettore $\underline{0}$)

5. Le n colonne di A sono un insieme di vettori linearmente indipendenti
6. $\text{rk}(A)=n$
7. Il sistema lineare $A\underline{x}=\underline{b}$ ha una e una sola soluzione.

Dim. 1) \Rightarrow 2) e 1) \Rightarrow 3) sono ovvie.

3) \Rightarrow 4). Sia $\underline{x} \in \ker A$, ovvero un vettore tale che $A\underline{x}=\underline{0}$, allora, detta B l'inversa sinistra di A , si ha $B(A\underline{x})=B\underline{0}=\underline{0}$ e quindi, per la proprietà associativa, $\underline{0}=(BA)\underline{x}=\underline{I}_n\underline{x}=\underline{x}$. Dunque \underline{x} è necessariamente il vettore nullo.

4) \Rightarrow 5). Detti $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_n$ i vettori colonna di A se per assurdo ci fossero degli scalari a_1, a_2, \dots, a_n non tutti nulli tali che $a_1\underline{c}_1 + a_2\underline{c}_2 + \dots + a_n\underline{c}_n = \underline{0}$ e si avrebbe $A \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \underline{0}$ e quindi si otterrebbe $\ker A \neq \{\underline{0}\}$, contro l'ipotesi.

5) \Rightarrow 4). Siano ancora $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_n$ i vettori colonna di A . Supponiamo per assurdo che $\ker A$ contenga il vettore non nullo $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, allora si avrebbe $A \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \underline{0}$ e dunque $a_1\underline{c}_1 + a_2\underline{c}_2 + \dots + a_n\underline{c}_n = \underline{0}$ con coefficienti non tutti nulli, contro l'ipotesi che i vettori colonna di A siano linearmente indipendenti.

4) \Rightarrow 6). Dalla teoria dei sistemi lineari si sa che se $\text{rk}(A) < n$ allora il sistema lineare omogeneo $A\underline{x}=\underline{0}$ ammette soluzioni non banali contro l'ipotesi e dunque $\text{rk}(A)=n$.

6) \Rightarrow 7). Segue dalla regola di Cramer

7) \Rightarrow 2). Consideriamo gli n sistemi lineari $A\underline{x}=\underline{e}_1, A\underline{x}=\underline{e}_2, \dots, A\underline{x}=\underline{e}_n$, dove $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ sono i vettori colonna della matrice \underline{I}_n . Ognuno di questi sistemi ha per ipotesi una e una sola soluzione \underline{d}_i ($1 \leq i \leq n$). Sia D la matrice formata dall'accostamento dei vettori \underline{d}_i (in altre parole sia D la matrice la cui i -esima colonna è \underline{d}_i per ogni i con $1 \leq i \leq n$), poiché, per ogni i con $1 \leq i \leq n$, la i -esima colonna di AD è il vettore colonna $A\underline{d}_i$, si ha $AD=\underline{I}_n$ e dunque A ammette D come matrice inversa a destra.

Ora la catena di implicazioni che abbiamo prima dimostrato ci danno 3) \Rightarrow 2), da cui per il Lemma dell'unicità dell'inversa otteniamo 3) \Rightarrow 1).

2) \Rightarrow 3) Se A ha un'inversa destra C , allora C ha A come inversa sinistra e dunque, visto che abbiamo provato che 3) \Rightarrow 2), C ha un'inversa destra che coincide con A per il Lemma di unicità della matrice inversa. Dunque $CA=\underline{I}_n$ ed A ha inversa sinistra.

Più avanti mostreremo anche che le condizioni

8) le righe di A sono un insieme di vettori linearmente indipendenti

9) $\det A \neq 0$

sono equivalenti alle precedenti.

Osserviamo inoltre che se A è una matrice che ammette inversa allora

- $AB=AC$ implica $B=C$ dove B e C sono matrici dello stesso tipo (n,q) ;
 - $DA=EA$ implica $D=E$ dove D ed E sono matrici dello stesso tipo (r,n) ;
 - Ogni equazione matriciale $AX=B$ con X e B matrici dello stesso tipo (n,q) ammette una ed una sola soluzione della forma $X=A^{-1}B$
 - Ogni equazione matriciale $YA=C$ con Y e C matrici dello stesso tipo (p,n) ammette una ed una sola soluzione della forma $Y=CA^{-1}$
- ATTENTI alla posizione di A^{-1} !!

Osserviamo inoltre che se A ammette inversa possiamo definire le potenze ad un esponente intero qualsiasi di A , ponendo

$$A^m = \begin{cases} \underbrace{AA \dots A}_{m \text{ volte}} & \text{se } m > 0 \\ I_n & \text{se } m = 0 \\ \underbrace{A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}}_{-m \text{ volte}} & \text{se } m < 0 \end{cases}$$

Anche in questo caso valgono le proprietà formali delle potenze.

Rimane ora da dare un metodo per calcolare A^{-1} , quando esiste.

Qui presentiamo il metodo di Gauss Jordan, negli appunti sul determinante è presentato un altro metodo.

Sia A una matrice quadrata di ordine n con $\text{rk}(A)=n$. Consideriamo la matrice $[A|I_n]$ e trasformiamola in forma a scala. Questo equivale a ridurre a scala in un solo colpo le matrici complete dei sistemi $A\mathbf{x}=\mathbf{e}_i$. Poiché $\text{rk}(A)=n$ la forma a scala di $[A|I_n]$ sarà $[U|B]$ dove U è una matrice triangolare alta che è la forma a scala di A e B è la matrice ottenuta da I_n attraverso le operazioni elementari eseguite.

$$\text{Sia } U = \begin{bmatrix} p_1 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & p_2 & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix}, \text{ aggiungendo alla } i\text{-esima riga di } [U|B] \text{ (per ogni } i \text{ con } 1 \leq i \leq n-1) \text{ l'ultima}$$

riga moltiplicata per $\frac{-u_{in}}{p_n}$, si annullano tutti i primi $n-1$ elementi della n -esima colonna di $[U|B]$ e non si modificano le prime $n-1$ colonne di $[U|B]$, aggiungendo alla i -esima riga della matrice così ottenuta (per ogni i con $1 \leq i \leq n-2$) la penultima riga moltiplicata per $\frac{-u_{in-1}}{p_{n-1}}$, si annullano tutti i primi $n-1$ elementi della $(n-1)$ -esima colonna della matrice che avevamo ottenuto, senza modificarne le prime $n-2$ colonne. Procedendo in modo analogo si ottiene, in un numero finito di passi, una matrice della forma $[D|C]$

dove $D = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_n)$, quindi dividendo (per ogni i con $1 \leq i \leq n$) la riga i -esima per $1/p_i$ si ottiene una matrice della forma $[I_n | C']$. Questo corrisponde ad avere trasformato i sistemi $A\underline{x} = \underline{e}_i$ in sistemi equivalenti della forma $I_n \underline{x} = \underline{c}'_i$, dove \underline{c}'_i è la i -esima colonna di C' e quindi C' è l'inversa di A .

Osservate che la procedura precedente applicata ad una matrice che non ammette inversa, si ferma perché non avendo A rango massimo si trova almeno un pivot uguale a 0.

Esempio

Calcolare l'inversa della matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Costruiamo la matrice $[A | I_3] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e applichiamo le mosse di Gauss per trasformarla in forma a scala.

Aggiungendo alla 2° riga la 1° riga moltiplicata per -2 e alla 3° riga la 1° riga moltiplicata per -3 si

ottiene $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, da questa aggiungendo alla 3° riga la 2° riga moltiplicata per -1 si

ottiene la forma a scala $[U | B] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

A questo punto si aggiunge alla 2° riga di questa matrice la 3° riga moltiplicata per -1/3 e si ottiene

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -5/3 & 4/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ed aggiungendo alla 1° riga di questa matrice la 2° riga

moltiplicata per 3/7 si ottiene $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2/7 & 4/7 & -1/7 \\ 0 & -7 & 0 & -5/3 & 4/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Ora da questa matrice

moltiplicando la 3° riga per 1/3 e la 2° per -1/7 si ottiene $[I_3 | C'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2/7 & 4/7 & -1/7 \\ 0 & 1 & 0 & 5/21 & -4/21 & 1/21 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$,

quindi $C' = \begin{bmatrix} 2/7 & 4/7 & -1/7 \\ 5/21 & -4/21 & 1/21 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ è l'inversa di A .