GEOMETRIA ED ALGEBRA LINEARE

Prima prova in itinere - 02/05/2012 - Versione A **Soluzioni**

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. $(3+4+4)$ Siano date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

e siano

$$T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad T_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

le applicazioni lineari definite come $T_A(X) = AX$ e $T_B(X) = BX$, con $X \in \mathbb{R}^3$.

(1) Determinare una base e la dimensione di $\mathrm{Im}(T_A)$.
(2) Determinare una base e la dimensione di $\mathrm{Im}(T_A) \cap \ker(T_B)$.
(3) Verificare che $\ker(T_A)$ è contenuto propriamente in $\ker(T_B \circ T_A)$.

Soluzione.

(1) In A le colonne C_1 e C_2 sono indipendenti, mentre $C_3 = C_1 + C_2$. Quindi $r(A) = \dim(\mathrm{Im}(T_A)) = 2$, ed una base è $\{C_1, C_2\}$.

(2) In B risulta $C_1 = C_2 = -C_3$, quindi $\dim(\ker(T_B)) = 3 - r(B) = 3 - 1 = 2$. In particolare $\ker(T_B) : x + y - z = 0$, per cui

$$\ker(T_B) = \left\{ \begin{bmatrix} -y+z \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

La matrice avente per colonne i vettori delle basi di $\mathrm{Im}(T_A)$ e $\ker(T_B)$ è data da

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La sottomatrice $\{R_1, R_2, R_3\} \cap \{C_1, C_2, C_3\}$ ha determinante non nullo, quindi $r(M) = 3$. Di conseguenza la dimensione di $\mathrm{Im}(T_A) + \ker(T_B)$ è 3, e per la formula di Grasmann, la dimensione di $\mathrm{Im}(T_A) \cap \ker(T_B)$ è 1.

(3) La matrice che esprime la composizione $T_B \circ T_A$ risulta

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $R_3 = R_1$ ed $R_2 = -R_1$, la matrice BA ha rango 1, per cui $\ker(T_B \circ T_A)$ ha dimensione 2. Esso è descritto dall'equazione $-x + 2y + z = 0$. Il nucleo di T_A, di dimensioone 1, è invece descritto dal sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -x + y = 0, \end{cases}$$

la cui soluzione $x = y$, $z = -y$ verifica l'equazione di $\ker(T_B \circ T_A)$, il che implica l'inclusione propria tra i due spazi.

Esercizio 2. $(6+3+2)$ Nello spazio vettoriale reale $V = \mathrm{Mat}(2,2;\mathbb{R})$ siano dati i vettori

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, X_4 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

(1) Verificare che X_1, X_2 sono linearmente indipendenti, che lo sono anche i vettori X_3, X_4, e che $L(X_1, X_2) = L(X_3, X_4)$.
(2) Detto U il sottospazio $L(X_1, X_2)$, consideriamo due sue basi $B = (X_3, X_4)$ e $B' = (X_1, X_2)$. Verificare che

$$U' = \{X \in U \mid [X]_B = [X]_{B'}\}$$

è un sottospazio di V.
(3) Determinare una base e la dimensione di U'.

Soluzione.
(1) Identificando V con $\mathbb{R}^4$ tramite l'isomorfismo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto [a,b,c,d]^t,$$

le matrici X_1, X_2, X_3, X_4 vengono rappresentate, rispettivamente, dalle quaterne $x_1 = [1,1,0,1]^t$, $x_2 = [0,1,1,0]^t$, $x_3 = [-1,2,3,-1]^t$ ed $x_4 = [-2,2,4,-2]^t$. La matrice avente per colonne le quaterne x_1, x_2, così come quella avente per colonne le quaterne x_3, x_4, hanno rango 2, da cui deriva l'indipendenza lineare delle coppie X_1, X_2 ed X_3, X_4. La matrice avente per colonne le quattro quaterne x_1, x_2, x_3, x_4 risulta

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Poiché $R_4 = R_1$ ed $R_3 = R_2 - R_1$, il rango di M è 2. Ciò implica, per esempio, che la terza e quarta colonna dipendono dalle prime 2, cioè che $L(X_3, X_4) = L(X_1, X_2)$.

(2) Siano α, β le coordinate di un generico $X \in U$ rispetto alla base B, cioè $X = \alpha X_3 + \beta X_4$. Allora $X \in U'$ se e solo se risulta anche $X = \alpha X_1 + \beta X_2$. Di conseguenza deve essere $\alpha X_1 + \beta X_2 = \alpha X_3 + \beta X_4$, cioè $\alpha(X_1 - X_3) + \beta(X_2 - X_4) = \mathbf{0}$ (matrice nulla). Osserviamo che

$$X_1 - X_3 = X_2 - X_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pertanto la condizione diventa

$$(\alpha + \beta) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\beta.$$

Quindi si ha $U' = \{\alpha(X_1 - X_2) \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Se $X, X' \in U'$ ed $a, a' \in \mathbb{R}$ abbiamo $X = \alpha(X_1 - X_2)$, $X' = \alpha'(X_1 - X_2)$, e quindi $aX + bX' = (a\alpha + a'\alpha')(X_1 - X_2) = \alpha''(X_1 - X_2) \in U'$, il che implica che U' è un sottospazio di V.

(3) Dalle considerazioni precedenti deriva immediatamente che U' ha dimensione 1, e che una sua base è, per esempio, $X_1 - X_2$.

Esercizio 3. (2+5+3+1) Siano dati i piani α_h, β_h e la retta r di equazioni rispettivamente

$$\alpha_h : x + hy - z = h, \quad \beta_h : hx - y + hz = 1, \quad r : \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y - 2z = 2 \end{cases}.$$

(1) Verificare che α_h e β_h hanno in comune una retta s_h, per qualunque valore di $h \in \mathbb{R}$.
(2) Si calcoli la posizione reciproca di r ed s_h, al variare di $h \in \mathbb{R}$.
(3) Si calcoli l' equazione del piano π contenente r e parallelo ad s_0 (ossia la retta s_h avendo posto $h = 0$).
(4) Calcolare, se esiste, l' equazione di una retta complanare con tutte e tre le rette $s_h, h = -1, 0, 1$.

Soluzione.

(1) La matrice dei coefficienti di x, y, z nel sistema tra α_h e β_h risulta

$$M_h = \begin{pmatrix} 1 & h & -1 \\ h & -1 & h \end{pmatrix}.$$

La sottomatrice $\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_2\}$ ha determinante $-1 - h^2$, diverso da zero per ogni a. Quindi M_h ha rango 2 ed il sistema ammette ∞^1 soluzioni, cioè una retta, $\forall h \in \mathbb{R}$.

(2) Consideriamo la matrice M'_h formata dai coefficienti di x, y, z nel sistema delle equazioni di α_h, β_h e dei due piani che definiscono r

$$M'_h = \begin{pmatrix} 1 & h & -1 \\ h & -1 & h \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Essa può avere rango 2 o 3, ed il sistema omogeneo associato $M'_h X = \mathbf{0}$ ammette ∞^1 soluzioni nel primo caso, e la sola soluzione banale nel secondo caso. Di conseguenza, se il sistema non omogeneo $M'_h X = [h, 1, 1, 2]^t$ è risolubile si hanno, rispettivamente, rette coincidenti o incidenti, altrimenti rette parallele nel primo caso o sghembe nel secondo caso. Orlando in M'_h la sottomatrice $\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_2\}$ abbiamo $\det\{R_1, R_2, R_3\} \cap \{C_1, C_2, C_3\} = -4h - 2$, e $\det\{R_1, R_2, R_4\} \cap \{C_1, C_2, C_3\} = 4h^2 + 2h$. Entrambi gli orlati si annullano quindi solo per $h = -1/2$. La matrice completa $\overline{M}'_h$, ottenuta accostando ad M'_h la colonna dei termini noti, ha determinante $-2(1 - h)(2h + 1)$. Risulta quindi

• $h \neq -1/2$. Se $h = 1$ allora $r(\overline{M}'_h) = r(M'_h) = 3$, e quindi le rette sono incidenti. Se $h \neq 1$, $r(\overline{M}'_h) = 4 > r(M'_h) = 3$ e le rette sono sghembe.

• $h = -1/2$. Orlando in $\overline{M}'_h$ la sottomatrice $\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_2\}$ con la colonna dei termini noti si ottiene in ogni caso un minore non nullo, per cui $r(\overline{M}'_h) = 3 > r(M'_h) = 2$ e le rette sono parallele.

(3) La retta s_0 ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = t. \end{cases}$$

.
Sostituendo in r si nota che la seconda equazione non ha soluzioni, quindi il piano richiesto è $2x - y - 2z = 2$.

(4) Esistono infinite rette dotate della proprietè richiesta. Basta prendere un qualsiasi piano γ contenente una delle tre rette, diciamo s_0, e non parallelo a nessuna delle altre

due, e considerare la retta che passa per i punti $A = s_1 \cap \gamma$ e $B = s_{-1} \cap \gamma$. Scegliendo per esempio il piano $y = -1$ si ha $A(1, -1, -1)$ e $B(-1, -1, 1)$, quindi una retta soluzione è AB, di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + 2q \\ y = -1 \\ z = -1 - 2q. \end{cases}$$