

## ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE

Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Appello 02/03/2017

Cognome:	Nome:	Matricola:
----------	-------	------------

Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta copia non devono essere consegnati.

1. Sia  $V$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  generato da  $\{(1\ 0\ 1\ 1)^T, (2\ 1\ 0\ -1)^T, (1\ 1\ -1\ -2)^T\}$ .

- Determinare la dimensione ed una base di  $V$ .
- Scrivere le equazioni parametriche e le equazioni cartesiane di  $V$ .
- Determinare una base ortonormale di  $V^\perp$ .

*Soluzione.*

- È immediato verificare che  $(1\ 1\ -1\ -2)^T = (2\ 1\ 0\ -1)^T - (1\ 0\ 1\ 1)^T$  e che  $(2\ 1\ 0\ -1)^T$  e  $(1\ 0\ 1\ 1)^T$  sono vettori linearmente indipendenti, pertanto  $V$  ha dimensione 2 ed una sua base è formata dai vettori  $v_1 = (2\ 1\ 0\ -1)^T$  e  $v_2 = (1\ 0\ 1\ 1)^T$ .
- Un sistema di equazioni parametriche di  $V$  è allora

$$\begin{cases} x_1 = t + 2s, \\ x_2 = s, \\ x_3 = t, \\ x_4 = t - s, \end{cases}$$

con  $t, s \in \mathbb{R}$ . Eliminando i parametri  $t, s$  dalle equazioni precedenti si ottengono le equazioni cartesiane di  $V$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

- Un generico vettore  $\underline{u} = (a\ b\ c\ d)^T \in \mathbb{R}^4$  appartiene a  $V^\perp$  se e solo se  $\langle \underline{u}, v \rangle = 0$  per ogni  $v \in V$ , cioè se e solo se  $a(t+2s) + bs + ct + d(t-s) = t(a+c+d) + s(2a+b-d) = 0$  per qualsiasi valore di  $t$  ed  $s$ , da cui si ottiene  $a = -h - k$ ,  $b = 2h + 3k$ ,  $c = h$  e  $d = k$ . Il generico vettore di  $V^\perp$  è quindi  $(-h - k\ 2h + 3k\ h\ k)^T$  con  $h, k \in \mathbb{R}$ . Una base di  $V^\perp$  è allora  $\{(-1\ 2\ 1\ 0)^T, (-1\ 3\ 0\ 1)^T\}$ . Ricaviamo una base ortonormale. Il primo vettore normalizzato diventa  $\underline{q}_1 = (\frac{-1}{\sqrt{6}}\ \frac{2}{\sqrt{6}}\ \frac{1}{\sqrt{6}}\ 0)^T$ . Un vettore di  $V^\perp$  ortogonale a  $\underline{q}_1$  si ottiene facendo  $\underline{b}_2 = (-1\ 3\ 0\ 1)^T - \langle (-1\ 3\ 0\ 1)^T, \underline{q}_1 \rangle \underline{q}_1 = (-1\ 3\ 0\ 1)^T - \frac{7}{\sqrt{6}}(\frac{-1}{\sqrt{6}}\ \frac{2}{\sqrt{6}}\ \frac{1}{\sqrt{6}}\ 0)^T = (\frac{1}{6}\ \frac{4}{6}\ -\frac{7}{6}\ 1)^T$ , normalizzando questo vettore si trova  $\underline{q}_2 = (\frac{1}{\sqrt{102}}\ \frac{4}{\sqrt{102}}\ -\frac{7}{\sqrt{102}}\ \frac{5}{\sqrt{102}})^T$ . I vettori  $\underline{q}_1, \underline{q}_2$  sono una base ortonormale di  $V^\perp$ .

Ovviamente si poteva anche osservare che  $\underline{u} = (a\ b\ c\ d)^T \in \mathbb{R}^4$  appartiene a  $V^\perp$  se e solo se  $\langle \underline{u}, v_1 \rangle = 0$  e  $\langle \underline{u}, v_2 \rangle = 0$ , cioè se e solo se  $2a + b - d = 0$ ,  $a + c + d = 0$ , ovvero se e solo se  $\underline{u} = (a\ b\ -3a - b\ 2a + b)^T$ . Un vettore di norma 1 di  $V^\perp$  è  $\underline{q}_1 = (0\ \frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{-1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}})^T$  (ottenuto ponendo  $a = 0, b = 1$  e poi normalizzando). Cerchiamo ora un altro vettore  $\underline{b}_2$  di  $V^\perp$  ortogonale al precedente. Deve essere  $\langle \underline{q}_1, \underline{b}_2 \rangle = \frac{b+3a+b+2a+b}{\sqrt{3}} = 0$ , quindi  $\underline{b}_2 = (-3\ 5\ 4\ -1)^T$  da cui normalizzando si trova  $\underline{q}_2 = (\frac{-3}{\sqrt{51}}\ \frac{5}{\sqrt{51}}\ \frac{4}{\sqrt{51}}\ \frac{-1}{\sqrt{51}})^T$ . I vettori  $\underline{q}_1, \underline{q}_2$  sono una base ortonormale di  $V^\perp$ .

Inoltre si poteva procedere anche completando la base trovata di  $V$  ad una base di  $\mathbb{R}^4$ . È immediato verificare che  $\underline{e}_1 = (1\ 0\ 0\ 0)^T$  non è combinazione lineare dei due vettori  $v_1, v_2$  e che  $\underline{e}_2 = (0\ 1\ 0\ 0)^T$  non è combinazione lineare dei vettori  $v_1, v_2, \underline{e}_1$ . Pertanto  $\{v_1, v_2, \underline{e}_1, \underline{e}_2\}$  è una base di  $\mathbb{R}^4$ . A partire da questa base costruiamo una base ortogonale di  $\mathbb{R}^4$  usando l'algoritmo di Gram Schmidt. Poniamo  $\underline{b}_1 = v_1, \underline{b}_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, \underline{b}_1 \rangle}{\|\underline{b}_1\|^2} \underline{b}_1 = v_2 - \frac{1}{6} \underline{b}_1 = (\frac{2}{3}\ -\frac{1}{6}\ 1\ \frac{7}{6})^T$ ,  $\underline{b}_3 = \underline{e}_1 - \frac{\langle \underline{e}_1, \underline{b}_1 \rangle}{\|\underline{b}_1\|^2} \underline{b}_1 - \frac{\langle \underline{e}_1, \underline{b}_2 \rangle}{\|\underline{b}_2\|^2} \underline{b}_2 = \dots$   
 $\underline{b}_4 = \underline{e}_2 - \frac{\langle \underline{e}_2, \underline{b}_1 \rangle}{\|\underline{b}_1\|^2} \underline{b}_1 - \frac{\langle \underline{e}_2, \underline{b}_2 \rangle}{\|\underline{b}_2\|^2} \underline{b}_2 - \frac{\langle \underline{e}_2, \underline{b}_3 \rangle}{\|\underline{b}_3\|^2} \underline{b}_3 = \dots$ . I vettori  $\underline{b}_1$  e  $\underline{b}_2$  formano una base ortogonale di  $V$ , mentre i vettori  $\underline{b}_3$  e  $\underline{b}_4$  formano una base ortogonale di  $V^\perp$ . Dividendoli per le loro norme si trova una base ortonormale di  $V^\perp$ .

2. Sia  $f_h$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice

$$F_h = \begin{pmatrix} h & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & h & 1 \end{pmatrix}, \quad h \in \mathbb{R}.$$

- i. Trovare i valori di  $h$  per i quali  $\dim(\ker(f_h)) = 1$ .
- ii. Stabilire se per i valori del punto precedente l'applicazione è diagonalizzabile.
- iii. Scrivere la matrice che rappresenta  $f_{-1}$  rispetto alla base  $\mathcal{B} = \{(0 \ 1 \ -1)^T, (2 \ 0 \ 1)^T, (1 \ 0 \ 0)^T\}$ .

*Soluzione.*

- i. Per il teorema di nullità più rango  $\dim(\ker(f_h)) = 1$  se e solo se  $rk(F_h) = 2$ . Risulta  $\det(F_h) = h(1+h)$ , quindi per  $h \neq 0, -1$  si ha  $rk(F_h) = 3$ . Se  $h = 0$  o se  $h = -1$ , si ha  $rk(F_h) = 2$  perché il minore formato dalle prime due righe e dalle ultime due colonne vale  $-3$ . Dunque  $\dim(\ker(f_h)) = 1$  se e solo se  $h = 0$  o  $h = -1$ .
- ii. La matrice  $F_0$  ha come autovalori  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ . L'autovalore 1 non è regolare perché  $rk(F_0 - I_2) = 2$ , dunque  $F_0$  (e anche  $f_0$ ) non è diagonalizzabile. Il polinomio caratteristico di  $F_{-1}$  è  $(-1 - \lambda)((1 - \lambda)^2 - 1)$ . Gli autovalori di  $F_{-1}$  sono allora  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 0$  e  $\lambda_3 = 2$ , ed essendo tutti distinti risulta che  $F_{-1}$  (e anche  $f_{-1}$ ) è diagonalizzabile.
- iii. Poniamo  $b_1 = (0 \ 1 \ -1)^T$ ,  $b_2 = (2 \ 0 \ 1)^T$  e  $b_3 = (1 \ 0 \ 0)^T$ . Per scrivere la matrice che rappresenta  $f_{-1}$  rispetto alla base  $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ , calcoliamo  $f_{-1}(b_1) = (1 \ 2 \ -2)^T = 2b_1 + 1b_3$ ,  $f_{-1}(b_2) = (-1 \ -1 \ 1)^T = -1b_1 - 1b_3$  e  $f_{-1}(b_3) = (1 \ 0 \ 0)^T = b_3$ , dunque  $f_{-1}(b_1)|_{\mathcal{B}} = (2 \ 0 \ 1)^T$ ,  $f_{-1}(b_2)|_{\mathcal{B}} = (-1 \ 0 \ -1)^T$  e  $f_{-1}(b_3)|_{\mathcal{B}} = (0 \ 0 \ 1)^T$ . La matrice che rappresenta  $f_{-1}$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  è allora

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si poteva anche procedere calcolando la matrice di passaggio dalla base canonica  $\mathcal{S}$  alla base  $\mathcal{B}$

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

da cui poi si ottiene che la matrice cercata è  $M_{\mathcal{B},\mathcal{S}}^{-1}F_{-1}M_{\mathcal{B},\mathcal{S}}$ .

3. Nello spazio riferito ad un sistema di coordinate cartesiane, si consideri la circonferenza di equazione

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2z = 0, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

- Determinare il centro ed il raggio di  $C$ .
- Scrivere le equazioni e classificare la conica  $C'$  ottenuta come proiezione ortogonale di  $C$  sul piano  $z = 0$ .
- Trovare i centri di tutte le sfere contenenti  $C$  ed aventi raggio  $\sqrt{11}$ .

*Soluzione.*

- La sfera  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2z = 0$  ha centro nel punto  $C = (2, 0, 1)$  e raggio  $R = \sqrt{5}$ . Il centro della circonferenza  $C$  è la proiezione ortogonale di  $C$  sul piano  $x + y + z = 0$  ed è dunque la soluzione del sistema  $x = 2 + t, y = t, z = 1 + t, x + y + z = 0$ , cioè  $C' = (1, -1, 0)$ . La distanza di  $C$  dal piano  $x + y + z = 0$  è  $d = \sqrt{3}$  e dunque il raggio di  $C$  è  $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{2}$ .
- Eliminando la  $z$  dalle equazioni della circonferenza  $C$  si ottiene l'equazione  $x^2 + y^2 + xy - x + y = 0$  del cilindro che ha  $C$  come direttrice e generatrici parallele all'asse  $z$ . Le equazioni di  $C'$  sono dunque  $x^2 + y^2 + xy - x + y = 0, z = 0$ . La conica  $C'$  essendo la proiezione ortogonale di una circonferenza su un piano (non ortogonale al piano su cui giace la circonferenza di partenza) è una ellisse reale non degenera.
- Tutte e sole le sfere contenenti  $C$  appartengono al fascio di equazione  $\lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2z) + \mu(x + y + z) = 0$ . La generica sfera del fascio ha raggio  $\sqrt{(\frac{4\lambda - \mu}{2\lambda})^2 + (\frac{-\mu}{2\lambda})^2 + (\frac{2\lambda - \mu}{2\lambda})^2}$ . Ponendo  $\sqrt{(\frac{4\lambda - \mu}{2\lambda})^2 + (\frac{-\mu}{2\lambda})^2 + (\frac{2\lambda - \mu}{2\lambda})^2} = \sqrt{11}$  si trova  $-24\lambda^2 - 12\lambda\mu + 3\mu^2 = 0$  da cui si ottiene  $\frac{\mu}{\lambda} = 2 \pm 2\sqrt{3}$ . Pertanto le due sfere contenenti  $C$  di raggio  $\sqrt{11}$  hanno equazioni  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2z + (2 \pm 2\sqrt{3})(x + y + z) = 0$  ed hanno centro in  $(1 \mp \sqrt{3}, -1 \mp \sqrt{3}, \mp \sqrt{3})$ .  
Si poteva anche più semplicemente notare che i centri delle sfere cercate devono stare sulla retta per il centro della circonferenza  $C$  perpendicolare al piano su cui  $C$  giace (di equazioni parametriche  $x = 2 + t, y = t, z = 1 + t$ ) e che devono avere distanza  $\sqrt{11}$  da un qualsiasi punto di  $C$ , in particolare da  $O$  che appartiene a  $C$  in quanto sia la sfera che il piano che ne determinano le equazioni passano per  $O$ . Quindi basta imporre che  $(2 + t)^2 + t^2 + (1 + t)^2 = 11$  da cui  $t = -1 \pm \sqrt{3}$  e i centri delle sfere sono  $(1 \pm \sqrt{3}, -1 \pm \sqrt{3}, \pm \sqrt{3})$ .