Esame di Geometria e Algebra Lineare

Politecnico di Milano – Ingegneria informatica

Prima prova in itinere – 30 Aprile 2014

1. Siano

$$r : \begin{cases} x + h^2 z - h + 1 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \qquad \pi : x + y + (h^2+1)z - h - 1 = 0.$$

(a) Determinare, al variare del parametro reale h, la mutua posizione di r e π.

(b) Per $h = \sqrt{2}$ trovare l'intersezione tra r e π.

Soluzione. La matrice completa del sistema lineare

$$\begin{cases} x + h^2 z - h + 1 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \\ x + y + (h^2+1)z - h - 1 = 0 \end{cases}$$

è

$$[A|b] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h^2 & h-1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & h^2+1 & h+1 \end{pmatrix}.$$

Facendo II riga−I riga → II riga e III riga−I riga → III riga si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & h^2 & h-1 \\ 0 & -1 & -h^2 & -h-1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e facendo III riga+II riga → III riga si ottiene

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h^2 & h-1 \\ 0 & -1 & -h^2 & -h-1 \\ 0 & 0 & -h^2+1 & -h+1 \end{pmatrix}$$

che è in forma a scala. Pertanto per $h \neq \pm 1$ si ha $rk([A|b]) = rk(A) = 3$ ed il sistema ha una ed una sola soluzione, quindi la retta e il piano si incontrano in un punto, le cui coordinate sono la soluzione del sistema; per $h = 1$ si ha $\mathrm{rk}([A|b]) = \mathrm{rk}(A) = 2$ ed il sistema è possibile ma ammette ∞^1 soluzioni, dunque la retta giace sul piano; per $h = -1$ si ha $\mathrm{rk}([A|b]) = 3,\ \mathrm{rk}(A) = 2$ ed il sistema è impossibile quindi la retta e il piano non hanno punti comuni e la retta è parallela al piano.

Per $h = \sqrt{2}$ la soluzione del sistema è la soluzione del sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 2z = \sqrt{2} - 1 \\ -y - 2z = -\sqrt{2} - 1 \\ -z = -\sqrt{2} + 1 \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} x = -\sqrt{2} + 1 \\ y = -3\sqrt{2} + 1 \\ z = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

2. (a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π contenente i punti di coordinate:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

π è uno spazio vettoriale? Se non lo è trovare un piano π' parallelo a π che lo sia e calcolarne una base.

(b) Sia

$$V = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Trovare dimensioni e basi dei sottospazi vettoriali V, $\pi' \cap V$ e $\pi' + V$.

(c) Stabilire se il vettore $\mathbf{v} = (1,\ 1,\ 2)^T$ appartiene a π', a V, a $\pi' \cap V$ e a $\pi' + V$.

Soluzione. Essendo $\overrightarrow{P_0P_1} = (-1, 0, -1)$ e $\overrightarrow{P_0P_2} = (0, -1, 1)$, le equazioni parametriche di π sono

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - s \\ z = 1 - t + s \end{cases}$$

con t, s parametri reali. Eliminando i parametri si ottiene l'equazione cartesiana di π: $x - y - z + 1 = 0$. Poiché il piano non passa per l'origine, l'equazione non è l'equazione cartesiana di un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Il piano π' parallelo a π che è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ ha equazione $x - y - z = 0$. Tale sottospazio è perpendicolare al vettore $(1, -1, -1)^T$ e quindi una sua base è formata dai vettori $(-1, 0, -1)^T$ e $(0, -1, 1)^T$, che lo generano.
I tre generatori di V non sono l.i., infatti il terzo è ottenuto dal primo meno il secondo, i primi due generatori sono invece l.i. e formano una base di V che pertanto ha dimensione 2.
I vettori $(-1, 0, -1)^T$, $(0, -1, 1)^T$, $(1, 0, 1)^T$, $(1, -1, 0)^T$ sono generatori di $\pi' + V$, il terzo è proporzionale al primo e quindi può essere eliminato e $(-1, 0, -1)^T$, $(0, -1, 1)^T$, $(1, -1, 0)^T$ sono l.i. in quanto

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha determinante non nullo, e dunque formano una base di $\pi' + V$, pertanto $\dim(\pi' + V) = 3$. Dalla formula di Grassmann risulta $\dim(\pi' \cap V) = 1$ e dunque $(1, 0, 1)^T$ è una sua base in quanto appartiene sia a π' sia a V.
Il vettore $\mathbf{v} = (1, 1, 2)^T$ non appartiene a π' in quanto le sue coordinate non soddisfano l'equazione cartesiana di π' e pertanto non appartiene a $\pi' \cap V$. Essendo invece $\mathbf{v} = (1, 1, 2)^T = 2(1, 0, 1)^T - (1, -1, 0)^T$, $\mathbf{v}$ appartiene a V e a maggior ragione a $\pi' + V$.

3. Sia $V = \mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado al più tre a coefficienti in $\mathbb{R}$ e $W = \mathbb{M}\text{at}_{\mathbb{R}}(2,2)$ quello delle matrici quadrate 2×2 a coefficienti in $\mathbb{R}$. Sia $f : V \to W$ l'applicazione lineare rappresentata, rispetto alle basi canoniche $\mathcal{E}_V$ di V e $\mathcal{E}_W$ di W dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare $f(1 + x^2 - x^3)$.

(b) Trovare la dimensione ed una base del nucleo e dell'immagine di f. Si riesce a riconoscere $\mathrm{Im}(f)$?

(c) Completare le basi del punto precedente rispettivamente ad una base $\mathcal{B}_V$ di V e ad una base $\mathcal{B}_W$ di W. Ricavare le matrici del cambiamento di base da $\mathcal{E}_V$ a $\mathcal{B}_V$ e da $\mathcal{B}_W$ a $\mathcal{E}_W$.

(d) Determinare la matrice A' che rappresenta f rispetto alle basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$.

(e) Verificare che A rappresenta l'applicazione f definita come

$$f(P) = \begin{pmatrix} P(1) - P(0) & P(-1) - P(0) \\ P(-1) - P(0) & P(0) \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi canoniche (dove P indica un generico polinomio di V).

Soluzione. Essendo $(1+x^2-x^3)_{\mathcal{E}_V} = (1, 0, 1, -1)^T$, si ha $f(1+x^2-x^3)_{\mathcal{E}_W} = A \cdot (1, 0, 1, -1)^T = (0, 2, 2, 1)$ quindi

$$f(1 + x^2 - x^3) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A ha due colonne uguali e si verifica facilmente che

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

dunque $rk(A) = 3$ da cui $\dim \mathrm{Im}(f) = 3$, e per il teorema di nullità più rango $\dim(\ker(f)) = 1$.
$\mathbb{R}^4$ è isomorfo a $\mathbb{M}\text{at}_{\mathbb{R}}(2,2)$, e l'immagine di f è rappresentata in $\mathbb{R}^4$ dallo spazio generato dalle colonne di A, di cui una base è data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ne segue che una base per $\mathrm{Im}(f)$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Quindi $\mathrm{Im}(f)$, essendo formata da tutte le combinazioni lineari di matrici simmetriche, contiene solo matrici simmetriche. Inoltre poiché ha dimensione 3, che è la stessa dello spazio delle matrici simmetriche di ordine 2 sul campo reale, coincide proprio con quest'ultimo sottospazio.
Il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ha come soluzione $(0, t, 0, t)^T$ e dunque una base di $\ker f$ è $\{x + x^3\}$.
Se aggiungiamo a

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

il vettore

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

otteniamo quattro vettori linearmente indipendenti che quindi sono una base per $\mathbb{R}^4$. Di conseguenza una base $\mathcal{B}_W$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Se aggiungiamo a

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i tre vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ della base canonica di $\mathbb{R}^4$, abbiamo quattro vettori linearmente indipendenti e di conseguenza una base $\mathcal{B}_V$ è $\{x + x^3, 1, x, x^2\}$.
La matrice del cambiamento di base da $\mathcal{E}_V$ a $\mathcal{B}_V$ è

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analogamente la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{E}_W$ a $\mathcal{B}_V$ è

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}_W$ a $\mathcal{E}_W$ è la sua inversa

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A' che rappresenta f rispetto alle basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$ è quindi

$$T^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia $P = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}^3[x])$ allora

$$f(P) = \begin{pmatrix} b + c + d & -b + c - d \\ -b + c - d & a \end{pmatrix}.$$

Ora $P_{\mathcal{E}_V} = (a, b, c, d)^T$, $f(P)_{\mathcal{E}_W} = (b+c+d, -b+c-d, -b+c-d, a)^T = A \cdot (a, b, c, d)^T$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$