GEOMETRIA ED ALGEBRA LINEARE

TEMA D' ESAME 07/09/2012

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. ($6+5$ punti) Sia $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'endomorfismo rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla seguente matrice

$$A=\begin{pmatrix} 10 & 1 & -3\\ 1 & 10 & 3\\ -3 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

(1) Determinare $\ker(f)$ ed $Im(f)$, una loro base, e la loro equazione cartesiana.
(2) Determinare gli autospazi ed una loro base ortonormale.

Soluzione.

(1) Le prime due colonne di A sono linearmente indipendenti, mentre il determinante di A risulta nullo. Quindi la caratteristica di A è 2, il che implica che la dimensione di $Im(f)$ è 2 (cioè $Im(f)$ è un piano), mentre, per l'equazione dimensionale, la dimensione di $\ker(f)$ è uguale a 1 (cioè $\ker(f)$ è una retta). Le prime due colonne di A possono quindi essere assunte come base di $Im(f)$, la cui equazione cartesiana risulta pertanto data da

$$\det\begin{pmatrix} 10 & 1 & x\\ 1 & 10 & y\\ -3 & 3 & z\end{pmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad x-y+3z=0,$$

ed $Im(f)=\{[x,x+3z,z]^t\backslash\, a,z\in\mathbb{R}\}$. Le equazioni parametriche del nucleo si ottengono risolvendo il sistema $A[x,y,z]^t=[0,0,0,]^t$. Svolgendo i conti otteniamo

$$\ker f\begin{cases} x=-q\\ y=q\\ z=-3q \quad q\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Di conseguenza $\ker(f)=\{[-q,q,-3q]^t\backslash\, q\in\mathbb{R}\}$, ed una sua base è rappresentata, per esempio, dal vettore $[-1,1,-3]^t$. Si noti, in particolare, che $\ker(f)$ è perpendicolare ad $Im(f)$.

(2) Uno degli autospazi è $E_0=\ker(f)$, essendo il nucleo non banale. Poichè A è una matrice simmetrica, per il teorema spettrale f è diagonalizzabile, e gli altri autospazi sono ortogonali ad E_0. Essendo $Im(f)\perp\ker(f)$, gli altri autospazi sono contenuti in $Im(f)$.

Osserviamo che il generico vettore di $v=[x,x+3z,z]\in Im(f)$ è tale che $Av=11v$, per ogni scelta di x,z. Di conseguenza $Im(f)$ è tutto autospazio, cioè $\lambda=11$ è autovalore doppio ed $Im(f)$ è l'autospazio ad esso associato (in alternativa si può ottenere lo stesso risultato calcolando il polinomio caratteristico di A, che risulta uguale a $-\lambda(11-\lambda)^2$).

Dal generico vettore di $Im(f)$ possiamo poi ricavare una base più semplice di quella formata dalle prime due colonne di A, per esempio $\{v_1=[1,1,0]^t; v_2=[0,3,1]^t\}$. Una base ortonormale di $\ker(f)$ è data dal vettore $\frac{1}{\sqrt{11}}[-1,1,-3]^t$. Una base ortonormale $\{w_1,w_2\}$ di $Im(f)$ si ottiene applicando il procedimento di Gram-Schmidt a $\{v_1,v_2\}$, e si ha

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} [1, 1, 0]^t$$
$$w_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1}{\|v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1\|} = \frac{v_2 - \frac{3}{2} v_1}{\|v_2 - \frac{3}{2} v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{22}} [-3, 3, 2]^t.$$

Esercizio 2. $(8+3$ punti) Nel piano euclideo, si consideri la conica di equazione

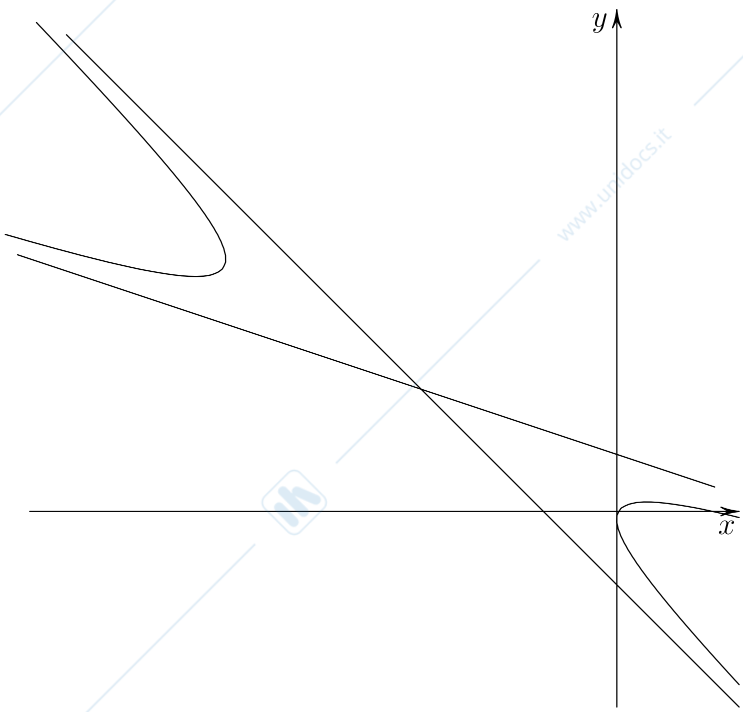
$$x^2 + 4xy + 3y^2 - 8x + 4y + 1 = 0.$$

(1) Classificarla e rappresentarla graficamente in maniera accurata.
(2) Determinare la distanza tra i suoi vertici.

Soluzione.
(1) La matrice associata alla conica è data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dal calcolo degli invarianti risulta $I_3 = 11$, $I_2 = -1$, $I_1 = 4$, quindi la conica è un'iperbole (non equilatera). Il sistema delle derivate parziali uguagliate a zero fornisce il centro $C(-16, 10)$. Uguagliando a zero la parte quadratica abbiamo $x^2 + 4xy + 3y^2 = (x + 3y)(x + y) = 0$, quindi gli asintoti sono le rette passanti per il centro e coefficienti angolari $m_1 = -1/3$ ed $m_2 = -1$. Gli assi sono le rette per C parallele agli autospazi. Gli autovalori associati alla parte quadratica sono le soluzioni dell'equazione caratteristica $\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$, cioè $\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$, da cui $\lambda = 2 \pm \sqrt{5}$. Per $\lambda = 2 - \sqrt{5}$ si ha l'autospazio $(\sqrt{5} - 1)x + 2y = 0$, per $\lambda = 2 + \sqrt{5}$ si ha l'autospazio $(-\sqrt{5} - 1)x + 2y = 0$. Il grafico della conica risulta pertanto dato da



(2) La distanza tra i vertici si può calcolare facilmente riducendo la conica a forma canonica. Questa è del tipo $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + I_3/I_2 = 0$. Sostituendo i valori trovati abbiamo $(2+\sqrt{5})x^2 + (2-\sqrt{5})y^2 - 11 = 0$. Le intersezioni reali con gli asssi cartesiani danno i punti

$$V_1\left(-\sqrt{\frac{11}{2+\sqrt{5}}}, 0\right), V_2\left(\sqrt{\frac{11}{2+\sqrt{5}}}, 0\right),$$

la loro distanza è uguale a $2\sqrt{\frac{11}{2+\sqrt{5}}}$ e corrisponde alla distanza richiesta.

Esercizio 3. (6 + 5 punti) Nello spazio euclideo, sia Q il cilindro avente generatrici parallele alla retta $r : x = y = z$, e direttrice data da

$$\begin{cases} y = x^2 \\ z = 0. \end{cases}$$

(1) Calcolare l'equazione di Q e riconoscerla.
(2) Verificare che Q ammette un piano di simmetria, e scriverne l'equazione corrispondente.

Soluzione.
(1) L'equazione cartesiana del cilindro richiesto si ottiene eliminando i parametri x_0, y_0, z_0, λ dal seguente sistema

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda & \text{(condizione affinché il primo parametro direttore sia 1)} \\ y = y_0 + \lambda & \text{(condizione affinché il secondo parametro direttore sia 1)} \\ z = z_0 + \lambda & \text{(condizione affinché il terzo parametro direttore sia 1)} \\ y_0 = x_0^2 & \text{(condizione affinché il generico punto della direttrice stia su } y = x^2\text{)} \\ z_0 = 0 & \text{(condizione affinché il generico punto della direttrice stia su } z = 0\text{).} \end{cases}$$

Dalla terza e quinta condizione ricaviamo $\lambda = z$, che sostituita nelle prime due fornisce $x_0 = x - z$, $y_0 = y - z$. Dalla quarta condizione si ottiene quindi l'equazione cartesiana di Q, data da $y - z = (x - z)^2$, cioè

$$x^2 - 2xz + z^2 - y + z = 0.$$

(2) La direttrice di Q è una parabola, quindi Q è un cilindro parabolico. La matrice ad esso associata è data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori associati alla parte quadratica sono $\lambda = 0$ (autovalore doppio) e $\lambda = I_1 = 2$. Il cilindro ammette un solo piano di simmetria, parallelo all'autospazio E_0, associato all'autovalore nullo. Esso risulta dato da $E_0 : x - z = 0$, per cui il piano di simmetria è del tipo $x - z + k = 0$ per un dato valore di $k \in \mathbb{R}$.

L'autospazio E_2 ha equazioni date da

$$\begin{cases} -x - z = 0 \\ -2y = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -z \\ y = 0. \end{cases}$$

L'intersezione $Q \cap E_2$ fornisce i punti $O(0,0,0)$ e $P\left(\frac{1}{4},0,-\frac{1}{4}\right)$, il cui punto medio $M\left(\frac{1}{8},0,-\frac{1}{8}\right)$ deve appartenere al piano di simmetria. Di conseguenza si ricava $k=-1/4$, e quindi $x-z-1/4=0$ è l'equazione del piano di simmetria del cilindro ottenuto