

# Applicazioni lineari



# Applicazioni lineari

- Siano  $V$  e  $W$  due spazi vettoriali sullo stesso campo  $K$ , una applicazione (funzione, trasformazione)  $f: V \rightarrow W$  è una *applicazione lineare* se
  1. per ogni  $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$  si ha  $f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2)$  ( $f$  additiva)
  2. per ogni  $\underline{v} \in V, t \in K$  si ha  $f(t\underline{v}) = tf(\underline{v})$  ( $f$  omogenea).

Un'applicazione lineare  $f: V \rightarrow K$  si dice *forma lineare*.

Un'applicazione lineare  $f: V \rightarrow V$  si dice *endomorfismo*.

- $f: V \rightarrow W$  è un'applicazione lineare se e solo se per ogni  $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V; t_1, t_2 \in K$  si ha  $f(t_1\underline{v}_1 + t_2\underline{v}_2) = t_1f(\underline{v}_1) + t_2f(\underline{v}_2)$
- Se  $f: V \rightarrow W$  è un'applicazione lineare,  $f(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$
- Esempi
  - Siano  $V$  uno spazio vettoriale su  $K$  di dimensione  $n$  e  $B$  una sua base. L'applicazione  $|_B: V \rightarrow K^n$  definita da  $|_B(\underline{v}) = \underline{v}|_B$  per ogni  $\underline{v} \in V$  (ovvero l'applicazione che ad ogni vettore  $\underline{v} \in V$  associa la sua  $n$ -upla di componenti rispetto alla base  $B$ ), è un'applicazione lineare
  - Sia  $A$  una matrice di tipo  $(m, n)$ , la funzione  $f_A: K^n \rightarrow K^m$  definita da  $f_A(\underline{v}) = A\underline{v}$  per ogni  $\underline{v} \in K^n$  è un'applicazione lineare (rappresentata dalla matrice  $A$ ).

## Applicazioni lineari: fibra, nucleo e immagine

- Sia  $f: V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Per ogni  $\underline{w} \in W$  la *fibra* di  $f$  sopra  $\underline{w}$  è l'insieme  $f^{-1}(\underline{w}) = \{\underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = \underline{w}\}$ . La fibra di  $f$  su  $\underline{0}_W$  si dice *nucleo*,  $\ker f$ , dell'applicazione  $f$ , ovvero  $\ker f = \{\underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = \underline{0}_W\}$ .
- Sia  $f: V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Per ogni sottoinsieme  $U$  di  $V$ , si pone  $f(U) = \{\underline{w} \in W \mid f(\underline{u}) = \underline{w} \text{ per qualche } \underline{u} \in U\}$ . L'*immagine* di  $f$ ,  $\text{Im } f$ , è l'insieme  $f(V) = \{\underline{w} \in W \mid f(\underline{v}) = \underline{w} \text{ per qualche } \underline{v} \in V\}$ .
- $\ker f$  è un sottospazio di  $V$  (ed è l'unica fibra di  $f$  che è sottospazio di  $V$ ).
- Se  $\underline{v}$  appartiene alla fibra di  $f$  su  $\underline{w}$ , tutti e soli gli elementi della fibra di  $f$  su  $\underline{w}$  sono i vettori della forma  $\underline{v} + \underline{v}_{\ker}$ , con  $\underline{v}_{\ker} \in \ker f$ .
- Se  $U$  è un sottospazio di  $V$ ,  $f(U)$  è un sottospazio di  $W$ , in particolare  $f(V) = \text{Im } f$  è un sottospazio di  $W$ .
- Se  $U$  ha dimensione finita,  $\dim f(U) \leq \dim U$ .
  - Se  $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n\}$  è una base di  $U$ ,  $\{f(\underline{b}_1), f(\underline{b}_2), \dots, f(\underline{b}_n)\}$  è un insieme di generatori (non necessariamente una base) di  $f(U)$ .

# Applicazioni lineari iniettive, suriettive, biunivoche

Sia  $f: V \rightarrow W$  un'applicazione lineare

- $f$  è *iniettiva* se per ogni  $\underline{v}, \underline{v}' \in V$ ,  $\underline{v} \neq \underline{v}'$  implica  $f(\underline{v}) \neq f(\underline{v}')$ , o equivalentemente se  $f(\underline{v}) = f(\underline{v}')$  implica  $\underline{v} = \underline{v}'$ 
  - $f$  è iniettiva se e solo se  $\ker f = \{0\}$
- $f$  è *suriettiva* se  $\text{Im } f = W$
- $f$  è *biiettiva* o *biunivoca* se è iniettiva e suriettiva (in tal caso  $f$  si chiama isomorfismo di  $V$  in  $W$ )
  - $f$  è biiettiva se e solo se  $\ker f = \{0_W\}$  e  $\text{Im } f = W$ .

Supponiamo che  $V$  e  $W$  abbiano dimensione finita.

- Se  $f$  è iniettiva allora  $\dim V \leq \dim W$
- Se  $f$  è suriettiva allora  $\dim W \leq \dim V$
- Se  $f$  è biiettiva allora  $\dim V = \dim W$

## Caso applicazioni lineari associate ad una matrice

Siano  $A$  una matrice di tipo  $(m,n)$ , ed  $f_A: K^n \rightarrow K^m$  l'applicazione lineare associata ad  $A$  ovvero l'applicazione definita da  $f_A(\underline{v})=A\underline{v}$  per ogni  $\underline{v} \in K^n$

- $\ker f_A = \ker A$ 
  - $f_A$  è iniettiva se e solo se  $\text{rk}(A)=n$
- $\text{Im } f_A = \text{Col}(A)$ 
  - $f_A$  è suriettiva se e solo se  $\text{rk}(A)=m$
- $f_A$  è biunivoca se e solo se  $A$  è una matrice quadrata di rango massimo, quindi con  $\det A \neq 0$ , quindi invertibile, etc.

## Teorema di nullità più rango per le applicazioni lineari

- Siano  $V$  uno spazio vettoriale su  $K$  di dimensione finita e  $f:V \rightarrow W$  un' applicazione lineare. Il *rango di  $f$* ,  $\text{rk } f$ , è la dimensione di  $\text{Im } f=f(V)$ .
- Siano  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  e  $f: V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora  $n = \dim \ker f + \dim \text{Im } f$ .
  - Ovviamente  $\dim \ker f = d \leq n$ . Sia  $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_d\}$  una base di  $\ker f$ .
  - Per il teorema di completamento della base esistono  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-d} \in V$  tali che  $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_d, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-d}\}$  è una base di  $V$  e  $\{f(\underline{u}_1), \dots, f(\underline{u}_d), f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_{n-d})\}$  è un insieme di generatori di  $f(V) = \text{Im } f$ , ma  $f(\underline{u}_1) = \dots = f(\underline{u}_d) = \underline{0}_W$ , quindi un insieme di generatori di  $\text{Im } f$  è  $\{f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_{n-d})\}$ .
  - Sia  $a_1 f(\underline{v}_1) + a_2 f(\underline{v}_2) + \dots + a_{m-d} f(\underline{v}_{m-d}) = \underline{0}_W$ . Allora  $f(a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_{m-d} \underline{v}_{m-d}) = \underline{0}_W$  e  $a_1 \underline{v}_1 + a_2 \underline{v}_2 + \dots + a_{m-d} \underline{v}_{m-d} \in \ker f$ , da cui  $a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_{m-d} \underline{v}_{m-d} = b_1 \underline{u}_1 + \dots + b_d \underline{u}_d$ , per qualche  $b_1, b_2, \dots, b_d \in K$ . Essendo  $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_d, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-d}\}$  una base di  $V$  segue  $a_1 = a_2 = \dots = a_{m-d} = (b_1 = b_2 = \dots = b_d) = 0$ . Dunque  $\{f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_{n-d})\}$  è una base per  $\text{Im } f$ .
- Si deduce il teorema di nullità più rango per le matrici.

## Applicazioni lineari $f:V\rightarrow W$ con $V$ di dimensione $n$

- Siano  $V$  uno spazio vettoriale con  $\dim V=n$  e sia  $B=\{\underline{b}_1,\underline{b}_2,\dots,\underline{b}_n\}$  una sua base. Siano  $\underline{w}_1,\underline{w}_2,\dots,\underline{w}_n$  vettori (arbitrariamente scelti) in uno spazio vettoriale  $W$ . Esiste una ed una sola applicazione lineare  $f:V\rightarrow W$  tale che  $f(\underline{b}_i)=\underline{w}_i$  per ogni  $i$  con  $1\leq i\leq n$ . L'applicazione  $f$  è definita da  $f(x_1\underline{b}_1+x_2\underline{b}_2+\dots+x_n\underline{b}_n)=x_1\underline{w}_1+x_2\underline{w}_2+\dots+x_n\underline{w}_n$ .
- Un'applicazione lineare  $f$  da  $V$  in  $W$ , con  $V$  di dimensione finita, è completamente determinata quando si conoscano le immagini dei vettori di una base di  $V$  mediante  $f$ . Inoltre essendo  $\dim f(V)\leq\dim V$  possiamo sempre vedere  $f$  come una applicazione di  $V$  in uno spazio vettoriale ( $f(V)$ ) di dimensione finita.

## Teorema di rappresentazione

Siano  $V$  e  $W$  due spazi vettoriali su  $K$  con  $\dim V=n$ ,  $\dim W=m$ , siano  $B$  e  $C$  due basi rispettivamente di  $V$  e  $W$ . Allora esiste un'unica matrice  $A$  di tipo  $(m,n)$  a coefficienti in  $K$  tale che per ogni  $\underline{v} \in V$ ,  $\underline{w}=f(\underline{v})$ , si abbia  $\underline{w}|_C=A(\underline{v}|_B)$ . La matrice  $A$  rappresenta l'applicazione lineare  $f$  rispetto alle basi  $B$  e  $C$  e si indica con  $M_{B,C}(f)$

- Sia  $B=\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n\}$ . Sia  $A$  la matrice che ha come colonna  $i$ -esima per ogni  $1 \leq i \leq n$ , le componenti del vettore  $f(\underline{b}_i) \in W$ , rispetto alla base  $C$

- Sia  $\underline{v} \in V$  e  $\underline{v}|_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  allora  $f(\underline{v})=f(\sum_{i=1}^n x_i \underline{b}_i)=\sum_{i=1}^n x_i f(\underline{b}_i)$ .

- Sia  $C=\{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_m\}$ , per costruzione di  $A$  si ha  $f(\underline{b}_i)=\sum_{j=1}^m a_{ij} \underline{c}_j$  e dunque  $f(\underline{v})=\sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^m a_{ij} \underline{c}_j = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \right) \underline{c}_j$  dove  $\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i$  è la componente  $j$  del vettore colonna  $A(\underline{v}|_B)$ . Quindi il vettore colonna  $A(\underline{v}|_B)$  è  $f(\underline{v})|_C$ .

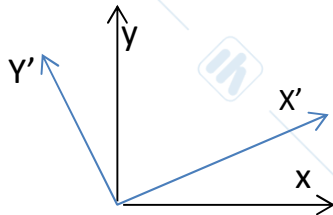
# Cambiamento di base

Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  sul campo  $K$  e siano  $B = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$  e  $C = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_n\}$  due basi di  $V$ . L'applicazione  $I_V: V \rightarrow V$  definita da  $I_V(\underline{v}) = \underline{v}$ , per ogni  $\underline{v} \in V$  è un'applicazione lineare, chiamata *identità* o funzione identica su  $V$ .

- La matrice  $M_{C,B}(I_V)$  si chiama *matrice di passaggio dalla base B alla base C*.
- La matrice  $M_{C,B}(I_V)$  è formata dall'accostamento dei vettori delle coordinate dei vettori della base C rispetto alla base B, ovvero 
$$M_{C,B}(I_V) = [\underline{w}_1|_B \mid \underline{w}_2|_B \mid \dots \mid \underline{w}_n|_B]$$
- Si ha  $[\underline{w}_1 \mid \underline{w}_2 \mid \dots \mid \underline{w}_n] = [\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \dots \mid \underline{v}_n] M_{C,B}(I_V)$
- Per ogni  $\underline{v} \in V$  si ha  $\underline{v}|_B = M_{C,B}(I_V) \underline{v}|_C$ .
  - Infatti  $\underline{v} = [\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \dots \mid \underline{v}_n] \underline{v}|_B$ , ma anche  $\underline{v} = [\underline{w}_1 \mid \underline{w}_2 \mid \dots \mid \underline{w}_n] \underline{v}|_C$  e quindi 
$$\underline{v} = [\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \dots \mid \underline{v}_n] M_{C,B}(I_V) \underline{v}|_C$$
- $M_{C,B}(I_V)$  è non singolare
  - Il sistema lineare  $M_{C,B}(I_V) \underline{x} = \underline{0}$  ha solo la soluzione banale
  - $M_{C,B}(I_V)^{-1} = M_{B,C}(I_V)$  è la matrice che trasforma le coordinate di  $\underline{v}$  rispetto a B nelle coordinate di  $\underline{v}$  rispetto a C.

# Una applicazione alla geometria

- *Formule di rotazione* di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali nel piano



Le coordinate  $(x,y)$  di  $P$  rispetto ad  $Oxy$  sono le componenti del vettore  $\overrightarrow{OP}$  rispetto alla base di  $\mathbb{R}^2$  rappresentata dai versori degli assi  $x,y$ , le coordinate  $(x',y')$  di  $P$  rispetto ad  $Ox'y'$  sono le componenti del vettore  $\overrightarrow{OP}$  rispetto alla base di  $\mathbb{R}^2$  rappresentata dai versori degli assi  $x',y'$ .

Sia  $\theta$  l'angolo che l'asse  $x$  forma con l'asse  $x'$ .

I versori dell'asse  $x'$  e dell'asse  $y'$  rispetto alla base formata dai versori degli assi  $x,y$  sono  $[\cos \theta, \sin \theta]^T$  e  $[-\sin \theta, \cos \theta]^T$ , quindi le formule di rotazione sono

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases}$$

# Sommario

Abbiamo imparato:

- cosa è un'applicazione lineare  $f$  e cosa sono  $\ker f$  e  $\text{Im} f$ ;
- quando un'applicazione lineare è iniettiva, suriettiva o biiettiva;
- il teorema di nullità più rango per un'applicazione lineare;
- quando un'applicazione lineare è univocamente determinata;
- il teorema di rappresentazione di un'applicazione lineare;
- cos'è la matrice di passaggio da una base  $B$  a una base  $C$