

A.A. 2015/2016

Data per l'orale:

8/7	11/7	26/7
-----	------	------

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – 7/7/2016		
Cognome:	Nome:	Matricola:

Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.

1. Si consideri il sistema lineare dipendente dal parametro reale h :

$$\begin{cases} x + y - hz = 4 \\ y + hz = h + 1 \end{cases}$$

- i. Provare che per ogni h il sistema descrive una retta r_h e se ne calcoli una terna di parametri direttori.
- ii. Trovare i valori di h per cui r_h è parallela, ma non contenuta, al piano $\pi_h : hx + (h - 1)y - 2z = h + 1$.
- iii. Riconoscere e trovare una forma canonica della superficie ottenuta dalla rotazione di r_1 rispetto ad r_0 .

2. Si consideri la matrice dipendente dal parametro reale h

$$A_h = \begin{bmatrix} h & h+1 & 0 \\ 2h & 1 & h-1 \\ 2h-2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- i. Trovare i valori di h per cui A_h è ortogonalmente diagonalizzabile.
- ii. Per i valori del punto precedente, determinare una matrice diagonale simile ad A_h e scrivere la corrispondente matrice diagonalizzante.
- iii. Si classifichi e si porti in forma canonica la conica di equazione

$$[x \ y \ 1] \cdot A_1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0,$$

determinando anche l'eventuale centro e gli assi di simmetria.

3. Si consideri il sottospazio $V \subset \mathbb{R}^4$ definito da $x_1 + 2x_2 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$.

i. Determinare la dimensione di V ed una sua base.

ii. Dati $\mathbf{u} = [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ e $\mathbf{w} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, dimostrare che $\mathbb{R}^4 = V \oplus \mathcal{L}[\mathbf{u}, \mathbf{w}]$.

iii. Verificare l'esistenza ed unicità di $f \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ tale che

$$f(\mathbf{u}) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T, \quad f(\mathbf{w}) = [1 \ 1 \ -1 \ -1]^T, \quad \ker(f) = V.$$

Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^4 .

Soluzioni

1. i. La matrice dei coefficienti del sistema lineare è

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -h \\ 0 & 1 & h \end{bmatrix},$$

il cui rango è 2 per ogni h . Per il teorema di Rouchè–Capelli, lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1 e quindi geometricamente corrisponde ad una retta. Una terna di parametri direttori di r_h è quindi $(2h, -h, 1)$.

- ii. La matrice completa del sistema formato dalle equazioni di r_h e del piano π_h

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -h & 4 \\ 0 & 1 & h & h+1 \\ h & h-1 & -2 & h+1 \end{array} \right],$$

che si porta facilmente alla seguente forma triangolare

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -h & 4 \\ 0 & 1 & h & h+1 \\ 0 & 0 & h^2+h-2 & -2h+2 \end{array} \right],$$

quindi la matrice dei coefficienti ha rango 2 se e solo se $h^2 + h - 2 = 0$ ovvero se $h = -2$ o $h = 1$. Se $h = 1$ anche la matrice completa ha rango 2, quindi il sistema ammette inf^1 soluzioni e la retta R_1 appartiene al piano π_1 . Se $h = -2$ la matrice completa ha rango 3 e pertanto la retta r_{-2} è l'unica ad essere parallela al piano π_2 , ma non contenuta in esso.

- iii. L'asse di rotazione r_0 è parallelo all'asse z ed è descritto dalle equazioni $x = 3$, $y = 1$. Un generico punto P di r_1 ha coordinate $(2t + 2, 2 - t, t)$. La circonferenza descritta da P_1 nella rotazione attorno ad r_0 ha equazioni

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = (2t+2-3)^2 + (2-t-1)^2 + t^2 \\ z = t \end{cases}.$$

La superficie di rotazione descritta da r_1 è il luogo di tali circonferenze al variare di P_1 su r_1 , dunque eliminando t otteniamo l'equazione della superficie

$$x^2 + y^2 - 5z^2 - 6x - 2y + 6z + 8 = 0.$$

La matrice della forma quadratica associata alla quadrica è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

e si vede subito che ha autovalori 1, 1, -5 e determinante -5. La matrice completa della quadrica è

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ -3 & -1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

ed ha determinante 1. Segue che una forma canonica di \mathcal{S} è

$$X^2 + Y^2 - 5Z^2 - \frac{1}{5} = 0$$

e quindi \mathcal{S} è un iperboloide iperbolico.

2. i. A_h è ortogonalmente diagonalizzabile se, e solo se, è simmetrica e quindi se, e solo se, $h = 1$.

ii. Il polinomio caratteristico di A_1 è

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 4) = (1-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda).$$

Gli autospazi relativi ai tre autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -1$ sono:

$$V_1 = \ker \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \quad V_3 = \ker \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \mathcal{L} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right),$$

$$V_{-1} = \ker \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathcal{L} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

Di conseguenza una matrice ortogonale diagonalizzante è

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

la cui corrispondente matrice diagonale è

$$D = Q^T A_1 Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

iii. L'equazione della conica è

$$x^2 + y^2 + 4xy + 1 = 0.$$

Gli invarianti metrici della conica sono $I_1 = 2$, $I_2 = -3$, $I_3 = -3$, da cui segue che la conica è un'iperbole. Una sua forma canonica è

$$3X^2 - Y^2 + 1 = 0.$$

Dato che nell'equazione della conica non compaiono termini lineari il centro dell'iperbole è l'origine, mentre gli assi di simmetria sono le due rette per il centro che hanno come direzione quella degli autovettori della matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

e sono pertanto le bisettrici dei quattro quadranti.

3. i. Lo spazio V corrisponde a

$$V = \ker \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Quindi $\dim(V) = 2$ ed una sua base è

$$\mathcal{B}_V = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Chiamiamo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ i due vettori di \mathcal{B}_V .

ii. $\mathbb{R}^4 = \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \oplus V$ se, e solo se, $\mathcal{B} = \{\mathbf{w}, \mathbf{u}\} \cup \mathcal{B}_V$ è una base di \mathbb{R}^4 . Questo è confermato dallo studio del rango della matrice

$$[\mathbf{w} \quad \mathbf{u} \quad \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

che è ovviamente 4.

iii. Essendo f definita sui vettori della base \mathcal{B} , l'esistenza ed unicità seguono dal teorema di rappresentazione. La matrice che rappresenta f rispetto alla coppia di basi \mathcal{B} dello spazio di partenza e base canonica S dello spazio di arrivo è immediata:

$$F|_{\mathcal{B}, S} = [f(\mathbf{w})|_S \quad f(\mathbf{u})|_S \quad f(\mathbf{v}_1)|_S \quad f(\mathbf{v}_2)|_S] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per la regola del cambiamento di base la matrice del cambiamento di base da \mathcal{B} ad S si ottiene invertendo la matrice

$$C = [\mathbf{w}|_S \quad \mathbf{u}|_S \quad \mathbf{v}_1|_S \quad \mathbf{v}_2|_S] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Utilizzando l'algoritmo di Gauss-Jordan abbiamo:

$$\begin{aligned} [C|I_4] &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = [I_4|D]. \end{aligned}$$

Quindi la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica è:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$