Elementi di geometria analitica del piano

Ripasso rapido di nozioni elementari

Consideriamo il piano riferito ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche Oxy, ogni punto P del piano è unicamente determinato da una coppia ordinata di numeri reali (x_0,y_0), chiamati rispettivamente ascissa ed ordinata del punto, che rappresentano le coordinate del vettore $\overrightarrow{OP}$ rispetto alla base (canonica) di R^2, formata dai versori $\underline{e}_1,\underline{e}_2$ degli assi cartesiani (indicati spesso anche con $\vec{i}, \vec{j}$). Il piano viene considerato come lo spazio euclideo R^2 rispetto al prodotto scalare standard

La *distanza di due punti* P (x_0,y_0), Q (x_1,y_1) è quindi $\|\overrightarrow{PQ}\|$, ovvero $\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$.

Le *coordinate del punto medio* M del segmento PQ sono $x_M=\frac{x_1+x_0}{2}$, $y_M=\frac{y_1+y_0}{2}$.

Siano $\underline{u}=[u_1,u_2]^T$, $\underline{v}=[v_1,v_2]^T$ due vettori di R^2, detto θ l'*angolo* da essi formato, si ha $\cos\theta=\frac{u_1v_1+u_2v_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$., quindi i due vettori sono *ortogonali* se e solo se $u_1v_1+u_2v^2=0$.

Retta

Una retta nel piano è individuata quando si conoscono un suo punto P (x_0,y_0) e la sua direzione $\underline{d}=[d_1,d_2]^T$, (oppure due suoi punti P (x_0,y_0), Q (x_1,y_1), infatti noti due punti sappiamo che la direzione della retta è data dal vettore $\underline{d}=[x_1-x_0,\ y_1-y_0]^T$). Noti P (x_0,y_0) e $\underline{d}=[d_1,d_2]^T$, la retta per P di direzione $\underline{d}$ ha *equazioni parametriche* $\begin{cases} x=x_0+d_1t \\ y=y_0+d_2t \end{cases}$ con $t\in R$, da cui, eliminando t si ottiene $d_2(x-x_0)-d_1(y-y_0)=0$, ovvero un'equazione lineare nelle variabili x,y dove i coefficienti delle variabili sono le componenti di un vettore $\underline{n}=[d_2,-d_1]^T$, ortogonale alla direzione della retta.

Viceversa ogni equazione lineare $ax+by+c=0$, con a,b non entrambi nulli rappresenta una retta con direzione $\underline{d}=[-b,a]^T$,ortogonale al vettore $\underline{v}=[a,b]^T$ dei coefficienti della variabili, infatti se $a\neq0$, considerato il punto P (-c/a, 0), la retta per P normale a $\underline{v}$ è il luogo dei punti Q tali che il vettore $\overrightarrow{PQ}$ sia ortogonale a $\underline{v}$ e quindi ha equazione $a(x+c/a)+by=0$ ovvero $ax+by+c=0$ (equazione generale della retta)

Le rette nel piano vengono spesso rappresentate anche con un'equazione del tipo $y=mx+q$, dove m è chiamato *coefficiente angolare* della retta e q *ordinata all'origine*. Questa forma si ottiene da $ax+by+c=0$ dividendo per b quando $b\neq0$, quindi $m=-a/b$, $q=-c/b$. In questa forma si perdono le rette per cui b=0 che hanno equazione $x=-c/a$ (e sono rette parallele all'asse y). Il coefficiente angolare è la tangente trigonometrica dell'angolo formato dall'asse x e dalla retta, l'ordinata all'origine è l'ordinata del punto di intersezione fra la retta e l'asse y.

Due rette nel piano sono o *incidenti* o *parallele*, sono incidenti se i loro vettori direzione sono linearmente indipendenti, sono parallele se i loro vettori direzione (o equivalentemente i loro vettori normali) sono linearmente dipendenti. Quindi due rette $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$ sono incidenti se e solo se $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq0$ e sono parallele se e solo se $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$.

L'*angolo fra due rette* è l'angolo formato dai loro vettori direzione (uguale a quello formato dai loro vettori normali) quindi $\cos\theta=\frac{a_1v_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$.. Due rette sono *perpendicolari* se e solo se i loro vettori direzione (o equivalentemente i loro vettori normali) sono ortogonali, ovvero se e solo se $a_1a_2+b_1b_2=0$.

Dati un punto P (x_0,y_0) ed una retta r:ax+by+c=0, la *distanza di* P *da* r è la norma della proiezione del vettore $\overrightarrow{AP}$ (con A∈ r) sul vettore $\underline{n}$ normale alla retta. Dunque sia A (x_1,y_1) con $ax_1+by_1+c=0$ allora $\overrightarrow{AP} = [x_0-x_1,y_0-y_1]^T$ e quindi dist(P,r) = $\frac{|<\overrightarrow{AP},\underline{n}>|}{\|\underline{n}\|} = \frac{|a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Date due rette r: $a_1x+b_1y+c_1=0$, s: $a_2x+b_2y+c_2=0$, il *fascio di rette* individuate da r ed s è l'insieme delle rette del piano di equazioni $\lambda(a_1x+b_1y+c_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2)=0$. Se le due rette r,s sono incidenti e P è il loro punto di intersezione, il fascio si chiama fascio *proprio* ed è formato da tutte e sole le rette del piano passanti per P, detto *punto base* del fascio; se r ed s sono parallele il fascio si dice *fascio improprio* ed è formato da tutte e sole le rette del piano parallele ad r.

Circonferenza

Si dice *circonferenza* il luogo dei punti del piano che hanno uguale distanza da un punto fisso C, detto *centro* della circonferenza. La distanza di un punto della circonferenza dal centro è detta *raggio* della circonferenza.

L'equazione della circonferenza di centro C (x_0,y_0) e raggio R è $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, che svolgendo i conti risulta una equazione del tipo $x^2+y^2+ax+by+c=0$.

Viceversa l'equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$ al variare di a,b,c può sempre essere scritta nella forma nella forma $(x-a/2)^2+(y-b/2)^2=a^2/4+b^2/4-c$, da cui abbiamo:

- se $a^2/4+b^2/4-c>0$, l'equazione rappresenta una circonferenza con centro nel punto C (-a/2,-b/2) e raggio $R=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}$;

- se $a^2/4+b^2/4-c=0$ l'equazione rappresenta una circonferenza con centro nel punto C (-a/2,-b/2) e raggio 0, ovvero è ridotta al solo punto reale C:

- se $a^2/4+b^2/4-c<0$, le coordinate di nessun punto reale soddisfano l'equazione che è quindi una circonferenza a punti immaginari.

Date una circonferenza $x^2+y^2+ax+by+c=0$ (a punti reali) ed una retta $a_1x+b_1y+c_1=0$, le coordinate dei loro punti di intersezione si ottengono dal sistema di secondo grado $\begin{cases} x^2+y^2+z^2+ax+by+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$. Tali punti possono essere reali distinti, reali coincidenti, o immaginari. Sono reali distinti se e solo se la distanza del centro della circonferenza dalla retta è minore del raggio della circonferenza ed in tal caso la retta si dice *secante*. Sono reali e coincidenti se e solo se la distanza del centro della circonferenza dalla retta è uguale al raggio, in tal caso la retta è *tangente* alla circonferenza nel punto di intersezione (due punti coincidenti) fra retta e circonferenza, tale punto risulta essere la proiezione del centro sulla retta. Sono immaginari se la distanza del centro della circonferenza dalla retta è maggiore del raggio ed in tal caso la retta è *esterna* alla circonferenza.

Date due $x^2+y^2+ax+by+c=0$, $x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0$ (a punti reali), le coordinate dei loro punti di intersezione si ottengono dal sistema di quarto grado $\begin{cases} x^2+y^2+z^2+ax+by+c=0 \\ x^2+y^2+z^2+a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$ equivalente a

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+ax+by+c=0 \\ (a_1-a)x+(b_1-b)y+(c_1-c)=0 \end{cases}$. Quindi si ottengono ancora due punti di intersezione che possono essere reali distinti, reali coincidenti, o immaginari. Se i punti sono reali e coincidenti le due circonferenze si dicono *tangenti* (questo accade se la distanza dei loro centri è uguale alla differenza o alla somma dei loro raggi).

Chiamiamo *fascio di circonferenze* individuato dalle circonferenze $x^2+y^2+ax+by+c=0$, $x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0$, l'insieme delle circonferenze di equazione $\lambda(x^2+y^2+ax+by+c)+\mu(x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1)=0$ con $\lambda, \mu \in R$. Tale fascio può anche essere rappresentato da $\lambda(x^2+y^2+ax+by+c)+\mu[(a_1-a)x+(b_1-b)y+(c_1-c)]=0$, la retta$(a_1-a)x+(b_1-b)y+(c_1-c)=0$ si chiama *asse radicale* del fascio. Se le due circonferenze che determinano il fascio hanno due punti reali e distinti in comune, tutte e sole le circonferenze del fascio passano per quei due punti, detti *punti base* del fascio, la retta radicale passa per quei due punti ed il luogo dei centri delle circonferenze del fascio è l'asse del segmento che ha per estremi i punti base del fascio; se le due circonferenze hanno due punti reali e coincidenti in comune, tutte e sole le circonferenze del fascio sono tangenti in tale punto all'asse radicale ed il luogo dei centri delle circonferenze del fascio è la retta perpendicolare all'asse radicale passante per il punto di tangenza.

Una circonferenza dipende da tre parametri essenziali ed è quindi completamente determinata se abbiamo tre condizioni lineari indipendenti come, ad esempio, se conosciamo

- centro e raggio,
- tre punti (non allineati) che devono appartenere alla circonferenza,
- due punti che devono appartenere alla circonferenza e la retta tangente in uno di essi (che non passa per l'altro punto).

Abbiamo già visto come scrivere una circonferenza di cui siano noti centro e raggio.

Vediamo allora come scrivere la circonferenza che passa per tre punti non allineati A,B,C. Scriviamo il fascio di circonferenze che ha A,B come punti base facendo la combinazione lineare della circonferenza con diametro AB, con la retta AB ed imponiamo il passaggio per C.

<u>Esempio</u> Scrivere la circonferenza per A (0,0), B (2,2), C(3,1).
La circonferenza che ha diametro AB ha centro nel punto medio M del segmento AB e raggio AM, dunque ha equazione $(x-1)^2+(y-1)^2=2$, ovvero $x^2+y^2-2x-2y=0$. La retta AB ha equazione $x-y=0$. Il fascio di circonferenze che ha A,B come punti base ha equazione $\lambda(x^2+y^2-2x-2y)+\mu(x-y)=0$. Tra le circonferenze del fascio cerchiamo quella passante per C: si ha $2\lambda+2\mu=0$, cioè $\lambda=-\mu$ da cui $\lambda(x^2+y^2-2x-2y)-\lambda(x-y)=0$ ovvero $x^2+y^2-3x-y=0$.

Vediamo poi come scrivere la circonferenza che passa per due punti A,B, ed è tangente in A ad una retta r non passante per B. Scriviamo il fascio di circonferenze tangente in A alla retta r facendo la combinazione lineare delle equazioni della circonferenza con centro A e raggio 0 e della retta r ed imponiamo il passaggio per B.

<u>Esempio</u> Scrivere la circonferenza per A (2,2), B (3,1) tangente in A alla retta x=2.
La circonferenza con centro A e raggio nullo ha equazione $(x-2)^2+(y-2)^2=0$, ovvero $x^2+y^2-4x-4y+8=0$. Il fascio di circonferenze tangenti in A alla retta x=2 ha equazione $\lambda(x^2+y^2-4x-4y+8)+\mu(x-2)=0$. Tra le circonferenze del fascio cerchiamo quella passante per B, si ha $2\lambda+\mu=0$, cioè $\mu=-2\lambda$ da cui $\lambda(x^2+y^2-4x-4y+8)-2\lambda(x-2)=0$. ovvero $x^2+y^2-6x-4y+12=0$,

<u>Coniche in forma canonica</u>

Chiamiamo *ellisse* il luogo dei punti del piano tali che la somma delle loro distanze da due punti fissi detti fuochi sia costante.

Chiamiamo *iperbole* il luogo dei punti del piano tali che il valore assoluto della differenza delle loro distanze da due punti fissi detti fuochi sia costante.

Fissato opportunamente un sistema di riferimento prendendo come asse x la retta congiungente i due fuochi, come asse y l'asse del segmento che ha per estremi i due fuochi, i due fuochi avranno quindi coordinate F_1 (c,0), F_2 (-c,0). Detta 2a la somma (il valore assoluto della differenza) costante delle distanze di un punto dell'ellisse (iperbole) dai fuochi, un punto P (x,y) appartiene all'ellisse (iperbole) se e solo se soddisfa all'equazione $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$ $\left(\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right|=2a\right)$, da cui effettuando tutti i calcoli e ponendo $b^2=a^2-c^2$ ($b^2=c^2-a^2$) troviamo l'equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$), che è l'equazione di una *ellisse (iperbole) in forma canonica.*

Osserviamo che sia l'ellisse sia l'iperbole sono *simmetriche* rispetto agli assi coordinati e rispetto all'origine degli assi, quindi hanno due *assi di simmetria* ortogonale che geometricamente sono la retta che congiunge i due fuochi, detta *asse focale*, e l'asse del segmento che ha per estremi i due fuochi e un *centro di simmetria* che è il punto medio del segmento che ha per estremi i due fuochi Vengono pertanto dette *coniche a centro*.

L'ellisse (in forma canonica) incontra l'asse x nei due punti reali A_1 (a,0), A_2 (-a,0) e l'asse y nei punti reali B_1 (0,b), B_2 (0,-b), questi quattro punti sono detti *vertici* dell'ellisse. Tutti i suoi punti reali hanno coordinate (x,y) che soddisfano le limitazioni $-a\leq x\leq a$, $-b\leq y\leq b$. L'ellisse è quindi tutta contenuta in un rettangolo coi lati paralleli agli assi di simmetria e passanti per i vertici. Le lunghezze a,b si dicono semiassi dell'ellisse. Ovviamente ogni equazione del tipo $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ rappresenta se a>b un'ellisse con fuochi di coordinate F_1 ($\sqrt{a^2-b^2}$, 0), F_2 ($-\sqrt{a^2-b^2}$, 0) e semiasse maggiore a, se invece a<b un'ellisse con fuochi di coordinate F_1 ($\sqrt{b^2-a^2}$, 0), F_2 ($-\sqrt{b^2-ab^2}$, 0) e semiasse maggiore b, infine se a=b una circonferenza i cui fuochi coincidono col centro.

L'iperbole (in forma canonica) incontra l'asse x nei due punti reali A_1 (a,0), A_2 (-a,0) detti *vertici* dell'ellisse e non ha intersezioni reali con l'asse y. Per questa ragione l'asse x (asse focale) viene anche detta *asse trasverso* e l'asse y *asse non trasverso*. Tutti i suoi punti reali hanno coordinate (x,y) che soddisfano le limitazioni $x\leq -a$ o $x\geq a$. Le rette $y=\pm\frac{b}{a}x$ si chiamano asintoti dell'iperbole.

Ovviamente ogni equazione del tipo $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ rappresenta un'iperbole con fuochi di coordinate F_1 ($\sqrt{a^2+b^2}$, 0), F_2 ($-\sqrt{a^2+b^2}$, 0) e asse x come asse trasverso, analogamente ogni equazione del tipo $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ rappresenta un'iperbole con fuochi di coordinate F_1 (0, $\sqrt{a^2+b^2}$), F_2 (0, $-\sqrt{a^2+b^2}$,) e asse y come asse trasverso. Se a=b o equivalentemente gli asintoti sono ortogonali l'iperbole si dice *equilatera* ed ha equazione canonica $x^2-y^2=a^2$. Se si cambia il sistema di riferimento, prendendo come assi coordinati gli asintoti, l'equazione dell'iperbole equilatera diventa xy=k, ove $k=a^2/2$. Viceversa si prova che ogni equazione xy=k rappresenta un'iperbole equilatera che ha per asintoti gli assi coordinati e sta nel primo terzo quadrante se k>0, nel secondo e quarto se k<0.

Chiamiamo *parabola* il luogo dei punti del piano che hanno uguale distanza da una punto fisso detto *fuoco* e da una retta detto fissa detta *direttrice*. Fissiamo il sistema di riferimento prendendo come asse x la retta perpendicolare alla direttrice passante per il fuoco e come asse y l'asse del segmento che ha per estremi il fuoco e l'intersezione della direttrice con l'asse x. Siano F (p/2,0) le

coordinate del fuoco e quindi x=-p/2 l'equazione della direttrice. Il punto P (x,y) appartiene alla parabola se e solo se $\left|x+\frac{p}{2}\right|=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}$, da cui razionalizzando e facendo i calcoli si ottiene $y^2=2px$. La parabola risulta avere un'*asse di simmetria* ortogonale che è la retta passante per il fuoco e ortogonale alla direttrice. Incontra tale asse in un punto detto *vertice*.
Ovviamente ogni equazione del tipo $y^2=ax$ rappresenta una parabola con fuoco nel punto F (a/4,0), direttrice x=-a/4 ed asse x come asse di simmetria, ogni equazione del tipo $x^2=ay$ rappresenta una parabola con fuoco nel punto F (0,a/4), direttrice y=-a/4 ed asse y come asse di simmetria.
Le coniche sopra descritte possono essere definite anche come *luogo dei punti del piano le cui distanze da un punto fisso detto fuoco e da una retta fissa detta direttrice è costante*. Il rapporto costante fra le due distanze, indicato con e, si chiama *eccentricità* della conica.
Se e>1 la conica è un'iperbole, se e=1 è ovviamente una parabola, se $0\leq e<1$ è un'ellisse che diventa una circonferenza quando e=0. Nel caso dell'iperbole o dell'ellisse in forma canonica si ha che e=c/a, F è uno dei due fuochi ed ha quindi coordinate (±c,0), e la *direttrice coniugata al fuoco* F ha equazione $x=\pm a^2/c$.

Coniche e loro classificazione

La forma abbastanza semplice delle equazioni di ellisse, iperbole e parabola ottenute sopra dipende dalla scelta particolarmente comoda del sistema di riferimento. Con un sistema arbitrariamente scelto le loro equazioni sarebbero risultate generiche equazioni di secondo grado nelle variabili x, y a coefficienti reali.

Quindi diciamo *conica* il luogo dei punti del piano che soddisfano un'equazione di secondo grado a coefficienti reali nelle variabili x,y; nel seguito scriveremo tale equazione nella forma :

(1) $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0.$

Notate che l'equazione (1) può anche essere scritta nella seguente forma matriciale

(2) $\underline{x}^T A\underline{x}+2\underline{b}^T\underline{x}+a_{33}=0$

dove $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ è una matrice reale e simmetrica, $\underline{b}=\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}$,

Un'altra scrittura più compatta dell'equazione (1) è

(3) $\underline{z}^T B\underline{z}=0,$

dove $B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c} A & \underline{b} \\ \hline \underline{b}^T & a_{33} \end{array}\right]$ è una matrice reale simmetrica, detta *matrice associata alla conica*, e $\underline{z}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$.

Le equazioni canoniche di ellisse, iperbole e parabola sono casi particolari di (1), inoltre è facile notare che anche $(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c2)=0$ con a_1,b_1,c_1, a_2, b_2, c_2 reali oppure con a_1,a_2; b_1,b_2; c_1, c_2 complessi coniugati è un'equazione di 2° grado a coefficienti reali in x,y.
Sappiamo dunque che una conica può essere:

- una parabola,
- un'ellisse (eventualmente una circonferenza)
- un'iperbole

oppure può essere spezzata in due rette che possono essere:

- reali non parallele
- reali parallele

- immaginarie coniugate (cioè le rette sono rappresentate da equazioni lineari a coefficienti complessi e i coefficienti di una retta sono i coniugati dei corrispondenti coefficienti dell'altra).

Ci chiediamo allora se ogni conica sia di uno dei precedenti tipi (osservate che il nome conica deriva dal fatto che ellissi, iperboli, parabole, coniche spezzate in rette reali non parallele, in rette coincidenti e in rette complesse coniugate, che si riducono ad un solo punto reale, possono essere ottenute sezionando una cono circolare retto con un piano in posizione opportuna e che solo tali curve possono essere ottenute sezionando un cono circolare retto con un piano) e se ci siano modi per decidere a partire da un'equazione di tipo (1) con che conica stiamo lavorando.
Dovremmo vedere che forma può assumere un'equazione di secondo grado a coefficienti reali quando si cambi il sistema di riferimento, in modo da portarlo a posizioni particolarmente favorevoli. Per cambiare il sistema di riferimento operiamo una rototraslazione che si scrive nella forma $\underline{x}=U\underline{X}+\underline{v}$, dove U è una matrice ortogonale con det U=1, $\underline{x}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$, $\underline{X}=\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}$, $\underline{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}$.
Per *classificare le coniche* usiamo il Teorema 2 delle dispensine su teorema spettrale etc.. che riscriviamo di seguito per il caso n=2, tenendo conto che $1\le rkA\le 2$, $1\le rk\,B\le 3$, $rk\,A\le rk\,B\le rk\,A+2$
Teorema: Sia $p(\underline{x})= \underline{z}^T B\underline{z} = \underline{x}^T A\underline{x}+2\underline{b}^T\underline{x}+a_{33} = a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}$ un polinomio di secondo grado nelle variabili x,y ove $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{12} & a_{22}\end{bmatrix}$, $\underline{b}\begin{bmatrix}a_{13}\\a_{23}\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{12} & a_{22} & a_{23}\\a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c}A & \underline{b}\\ \hline \underline{b}^T & a_{33}\end{array}\right]$
(ovvero sia $p(\underline{x})=0$ l'equazione di conica nel piano) Allora:

a. gli autovalori e quindi il rango e la traccia di A, il determinante ed il rango di B sono invarianti per rototraslazioni;
b. il polinomio $p(\underline{x})$ può essere portato tramite una isometria (rototraslazione) $\underline{x}= U\underline{X}+\underline{v}$ in una delle seguenti forme:
   - $p(\underline{X})= \lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+c'$, se rk A=2 e λ_1,λ_2 sono gli autovalori (ovviamente non nulli) di A, con c'=0 se rk B=2, c'≠0 se rk B=3
   - $p(\underline{X})= \lambda_1X^2 + c'$, se rk A=1 e λ_1 è l'unico autovalore non nullo di A, con c'=0 se rk B=1, c'≠0 se rk B=2
   - $p(\underline{X})= \lambda_1X2+2pY$ con $p\neq 0$, se rk A=1 e rk B=3.

Dal punto a. del teorema sappiamo quindi che sono invarianti per rototraslazione I_3= det B, I_2=det $A=\lambda_1\lambda_2$, I_1=tr $A==\lambda_1+\lambda_2$, dove λ_1, λ_2 sono gli autovalori di A. I_3, I_2, I_1 sono chiamati *invarianti ortogonali* della conica.
Osserviamo che, moltiplicando l'equazione di una conica per un numero reale $k\neq 0$, si ottiene un'equazione che rappresenta la stessa conica, ma il valore di I_3 è moltiplicato per k^3 e per questa ragione I_3 è detto *invariante cubico*, quello di I_2 è moltiplicato per k^2 e per questa ragione I_2 è detto *invariante quadratico*, quello di I_1 è moltiplicato per k e per questa ragione I_1 è detto *invariante lineare*. Moltiplicando per k l'equazione della conica non si modifica quindi il segno di I_2 ed il fatto che gli invarianti siano uguali o diversi da 0.
Esaminiamo ora i casi possibili seguendo il punto b. del teorema

- se rk A=2, rkB=3 (quindi $I_3\neq 0$, $I_2\neq 0$ l'equazione della conica a seguito di opportuna rototraslazione diventa $\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+c'=0$ con $c'\neq 0$, il det B calcolato su questa nuova forma dell'equazione diventa $\lambda_1\lambda_2c'$ da cui $c'=\frac{I_3}{I_2}$ quindi l'equazione si può più precisamente scrivere come $\lambda_1X^2+ \lambda_2Y^2+\frac{I_3}{I_2}=0$, da cui
  - se $I_2>0$ e $I_3I_1<0$ allora gli autovalori sono di segno concorde e di segno discorde a c'= e pertanto la conica è un'ellisse reale.
  - se $I_2>0$ e $I_3I_1>0$ allora gli autovalori e c' sono di segno concorde e quindi la conica non ha punti reali e viene detta ellisse immaginaria

- se $I_2<0$ gli autovalori hanno segno discorde e la conica rappresenta un'iperbole che è equilatera se e solo se $I_1=0$.

- se rk A=rk B=2 (quindi $I_3=0$, $I_2\neq 0$) l'equazione della conica a seguito di opportuna rototraslazione diventa $\lambda_1 X^2+\lambda_2 Y^2=0$, da cui
  - se $I_2>0$, gli autovalori sono di segno concorde e la conica ha un solo punto reale ed è spezzata in due rette immaginarie coniugate con quel punto in comune
  - se $I_2<0$, gli autovalori sono di segno discorde e la conica è spezzata in due rette reali incidenti
- se rk A=1 e rkB=3 (quindi $I_3\neq 0$, $I_2=0$), l'equazione della conica assume la forma $\lambda_1 X^2+2pY=0$ e rappresenta quindi una parabola. Inoltre nella nuova forma si ha det B=$-\lambda_1 p^2$ e dunque $p=\pm\sqrt{-\frac{\det B}{\lambda_1}}$.
- se rk A=1 e rkB=2 (quindi $I_3= I_2=0$), l'equazione della conica assume la forma$\lambda_1 X^2+c'=0$ con $c'\neq 0$ e la conica si spezza in due rette parallele reali se $\lambda_1 c' < 0$, immaginarie se $\lambda_1 c' = > 0$.
- se se rk A= rkB=1 (quindi $I_3= I_2=0$), l'equazione della conica assume la forma $\lambda_1 X^2=0$ e la conica è quindi spezzata in due rette reali coincidenti.

Quindi non ci sono altri tipi di conica oltre quelli che avevamo già elencato (pur di trattare come ellissi le ellissi immaginarie e le circonferenze che si ottengono come caso particolare delle ellissi quando $\lambda_1=\lambda_2$).
Ellissi, iperboli e parabole sono dette coniche *non degeneri*, le coniche spezzate in due rette sono dette *degeneri*.
Si può quindi classificare una conica data utilizzando il seguente schema:

$$I_3\begin{cases} =0 \text{ coniche degeneri} \Rightarrow I_2\begin{cases} >0 \text{ spezzata in due rette immaginarie coniugate} \\ =0 \text{ spezzata in due rette parallele (ev. imm.coniugate)} \\ <0 \text{ spezzata in due rette reali non } \parallel \ (\perp \text{ se } I_1=0) \end{cases} \\ \neq 0 \text{ coniche non degeneri} \Rightarrow I_2\begin{cases} >0 \text{ ellisse (immaginaria se } (I_3 I_1>0) \\ =0 \text{ parabola} \\ <0 \text{ iperbole (equilatera se } I_1=0) \end{cases} \end{cases}$$

Osserviamo che dalla dimostrazione del teorema 2 segue anche che se la conica è una conica a centro (ellisse o iperbole) le *coordinate del centro* sono le soluzioni del sistema lineare $A\underline{x}=-\underline{b}$ e che gli *assi di una conica* a centro hanno la direzione degli autovettori associati agli autovalori di A. Si possono inoltre calcolare le lunghezze dei semiassi maggiore e minore delle ellissi reali e dei semiassi trasverso e non trasverso di una iperbole ed inoltre la lunghezza del semiasse focale e e l'eccentricità. Infatti la forma canonica $\lambda_1 X^2+ \lambda_2 Y^2+\frac{I_3}{I_2}=0$ può essere scritta nella forma $\frac{X^2}{-\frac{I_3}{\lambda_1 I_2}}+\frac{Y^2}{-\frac{I_3}{\lambda_2 I_2}}=1$, quindi se siamo nel caso di un'iperbole e abbiamo scelto come λ_1 l'autovalore discorde con $\frac{I_3}{I_2}$, abbiamo $a=\sqrt{-\frac{I_3}{\lambda_1 I_2}}$ e $b=\sqrt{\frac{I_3}{\lambda_2 I_2}}$, se invece siamo nel caso di una ellissi reale e abbiamo scelto come λ_1 l'autovalore minore in valore assoluto, abbiamo $a=\sqrt{-\frac{I_3}{\lambda_1 I_2}}$ e $b=\sqrt{-\frac{I_3}{\lambda_2 I_2}}$. Dai valori di a, b si ricavano in entrambi i casi c ed e con le solite formule.
Nel caso di una iperbole altre rette importanti sono gli *asintoti* che per una iperbole in forma canonica hanno equazioni $y=\pm\frac{b}{a}x$ e quindi sono rette passanti per il centro con direzioni $\pm\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$.
Le direzioni degli asintoti coincidono con le direzioni delle rette in cui si spezza la conica la cui equazione si ottiene uguagliando a 0 il complesso dei termini di secondo grado dell'equazione dell' iperbole data. Notate che una volta trovati gli asintoti di una iperbole, i suoi assi sono le bisettrici

degli angoli formati dagli asintoti e si possono quindi anche trovare come luogo dei punti del piano equidistanti dai due asintoti.
L'*asse di una parabola* ha la direzione dell'autovettore associato all'autovalore nullo (la direzione dell'asse della parabola è anche data dalla direzione delle due rette coincidenti in cui si spezza il complesso dei termini quadratici dell'equazione della parabola).
Nel caso della parabola questa informazione non basta a determinare l'asse che si può comunque trovare tenendo conto che la retta tangente alla parabola nel vertice è ortogonale all'asse per cui basta determinare fra le rette ortogonali all'asse (di cui conosciamo la direzione) quella tangente alla parabola. Il punto di tangenza è il vertice della parabola e quindi si può trovare l'asse ed anche le coordinate del fuoco e l'equazione della direttrice. Infatti la direttrice è perpendicolare all'asse e non interseca la parabola ed il vertice è il punto medio del segmento dell'asse che ha come estremi il fuoco e il punto di intersezione fra direttrice ed asse. La lunghezza di tale segmento è $2\sqrt{-\frac{\det B}{\lambda_1}}$.
.
Le *intersezioni di una conica con una retta* sono i punti le cui coordinate si ottengono risolvendo il sistema di secondo grado formato dall'equazione della conica e da quella della retta e sono al più due punti. Se le intersezioni sono due punti reali coincidenti, la retta si dice *tangente* alla conica nel punto (ovvero nei due punti che coincidono) di intersezione. Una conica può essere vista come una particolare curva piana $f(x,y)=0$ in forma implicita, quindi la *retta tangente* ad una conica in un suo punto $P(x_0,y_0)$ (dove ovviamente $f(x_0,y_0)=0$) ha equazione $(\partial f/\partial x)_P(x-x_0)+(\partial f/\partial y)_P(y-y_0)=0$ o equivalentemente $[x_0,y_0]A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=0$.
Le *intersezioni fra due coniche* sono i punti le cui coordinate si ottengono risolvendo il sistema di quarto grado formato dalle equazioni delle due coniche e sono in genere quattro punti (eventualmente in parte coincidenti).
Chiamiamo *fascio di coniche* individuato dalle coniche $a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2+2d_1x+2e_1y+f_1=0$, $a_2x^2+2b_2xy+c_2y^2+2d_2x+2e_2y+f_2=0$ l'insieme delle coniche di equazione $\lambda(a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2+2d_1x+2e_1y+f_1)+\mu(a_2x^2+2b_2xy+c_2y^2+2d_2x+2e_2y+f_2)=0$ con $\lambda, \mu\in R$ o $a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2+2d_1x+2e_1y+f_1+k(a_2x^2+2b_2xy+c_2y^2+2d_2x+2e_2y+f_2)=0$ con $k=\mu/\lambda\in R$ (ricordate però che usando un solo parametro perdete la conica del fascio che si ottiene per $\lambda=0$).
I punti di intersezione delle due coniche che determinano il fascio sono detti *punti base* del fascio ed ogni conica del fascio passa per quei punti. Osservate che se ci sono due punti base coincidenti, ovvero se le coniche che determinano il fascio sono tangenti in un punto ad una stessa retta r, tutte le coniche del fascio sono tangenti in quel punto alla retta r.
In un fascio di coniche che non sia formato da coniche tutte degeneri ci sono in generale tre coniche degeneri che si ottengono calcolando i valori di k per cui si annulla l'invariante cubico. In un fascio di coniche che non sia formato solo da parabole ci sono in generale due parabole (eventualmente degeneri in due rette parallele) che si ottengono calcolando i valori di k per cui si annulla l'invariante quadratico. In un fascio di coniche che non sia formato solo da iperboli equilatere c'è in generale una sola iperbole equilatera (eventualmente degenere in due rette ortogonali) che si ottiene calcolando il valore di k per cui si annulla l'invariante lineare.
Una conica dipende da 6 parametri omogenei quindi da 5 parametri essenziali perché l'equazione di una conica è definita a meno di un fattore moltiplicativo non nullo. Una conica è quindi completamente determinata se abbiamo *5 condizioni lineari* come, ad esempio, se conosciamo
- 5 punti a tre a tre non allineati per cui deve passare la conica
- 4 punti a tre a tre non allineati per cui deve passare la conica e la retta tangente in uno di essi (che naturalmente non deve passare per gli altri punti)
- 3 punti non allineati per cui deve passare la conica e le rette tangenti in due di essi (che naturalmente non devono passare per gli altri punti)

Vediamo allora come scrivere la *conica* che passa *per cinque punti* a tre a tre non allineati

A, B, C, D, E. Scriviamo il fascio di coniche che ha A, B, C, D come punti base facendo la combinazione lineare delle equazioni delle coniche degeneri spezzate rispettivamente nelle rette AB e CD e nelle rette AC e BD ed imponiamo il passaggio per E.
Per scrivere la conica che passa per quattro punti a tre a tre non allineati A, B, C, D ed è tangente in A alla retta r, scriviamo l'equazione del fascio di coniche che passano per A, B, C e sono tangenti in A ad r facendo la combinazione lineare delle equazioni delle coniche degeneri spezzate rispettivamente nelle rette AB e AC e nelle rette r e BC ed imponiamo il passaggio per D.
Per scrivere la conica che passa per tre punti non allineati A, B, C ed è tangente in A alla retta r ed in B alla retta s scriviamo l'equazione del fascio di coniche che passano per A, B e sono tangenti in A ad r ed in B ad s facendo la combinazione lineare delle equazioni delle coniche degeneri spezzate rispettivamente nella retta AB contata due volte e nelle rette r ed s ed imponiamo il passaggio per C.

<u>Brevissimi complementi</u> (potete anche tralasciarli)

Si può osservare che in geometria analitica spesso una direzione gioca un ruolo analogo ad un punto, e che spesso abbiamo dei punti "mancanti", ad esempio abbiamo detto che una retta in genere incontra una conica in due punti (reali o immaginari), ma se consideriamo l'intersezione di una parabola con una retta parallela al suo asse troviamo una sola intersezione (ci manca quindi un punto che è la direzione dell'asse).
Può quindi risultare utile trovare un modo di rappresentare una direzione come un punto, tuttavia con le solite coordinate cartesiane possiamo rappresentare senza ambiguità solo i punti del piano. Possiamo allora pensare di rappresentare punti e direzioni con terne di elementi di cui il terzo elemento è un'etichetta che dice se stiamo considerando un punto o una direzione. Potremmo per convenzione stabilire che l'etichetta è 1 se stiamo considerando un punto, è 0 se stiamo considerando una direzione. In questo modo la direzione $[a,b]^T$ viene rappresentata come terna (a,b,0) ed il punto di coordinate (x_0,y_0) viene rappresentato dalla terna $(x0,y_0,1)$. Nel caso di una direzione però abbiamo che, per ogni $k\neq 0$, $[a,b]^T$ e $[ka,kb]^T$ rappresentano la stessa direzione e quindi le terne (a,b,0) e (ka,kb,0) devono rappresentare lo stesso elemento. Per rendere la situazione uniforme coi punti del piano conveniamo di rappresentare il punto (x_0,y_0) con una qualsiasi terna $(kx_0,ky0,k)$ con $k\neq 0$.
Diciamo *piano proiettivo* l'insieme delle terne (a,b,c), con la convenzione che due terne proporzionali rappresentino lo stesso punto. I punti del piano proiettivo sono di due tipi: punti propri (con $c\neq 0$) , punti impropri (con c=0).
Ogni terna (a,b,c) con $c\neq 0$ corrisponde al punto (a/c, b/c) del piano cartesiano, ogni terna (a,b,0) corrisponde alla direzione $[a,b]^T$. Le terne (a,b,c) sono dette *coordinate omogenee* dei punti del piano proiettivo.
Nel piano proiettivo si ottengono le equazioni di rette e coniche sostituendo X/U ad x e Y/U ad y. Ogni retta è quindi rappresentata da un'equazione lineare omogenea nelle variabili X,Y,U, viceversa ogni equazione lineare omogenea nelle variabili X,Y,U rappresenta una retta. In questo modo ammettiamo anche una retta del tipo U=0 che si chiama *retta impropria*.
Ogni conica nel piano proiettivo è rappresentata da una equazione omogenea di secondo grado nelle variabili X,Y, U e viceversa. Abbiamo così fra le coniche anche le coniche spezzate in una retta e nella retta impropria o nella retta impropria contata due volte.
Le coniche possono essere classificate sulla base dei loro punti impropri, infatti una conica non degenere è una parabola se ha due intersezioni coincidenti con la retta impropria (e questo punto rappresenta la direzione dell'asse),è un'ellisse se ha due intersezioni immaginarie con la retta impropria ed è una iperbole se ha due intersezioni reali e distinte con la retta impropria (e tali punti rappresentano le direzioni degli asintoti).
Data una conica f(X,Y,U)=0 nel piano proiettivo, ed un punto P (a,b,c) in coordinate omogenee, si chiama *polare* di P rispetto alla conica, la retta di equazione $(\partial f/\partial X)_P X+(\partial f/\partial Y)_P Y++(\partial f/\partial U)_P U=0$

Se P è un punto della conica, riportando questa retta in coordinate cartesiane (dividendo per U e sostituendo x ad X/U e y ad Y/U) si trova l'equazione della tangente alla curva in P, se invece P non appartiene alla conica e la polare di P interseca la conica in due punti A e B le rette PA e PB sono le tangenti alla conica uscenti da P.
Utilizzando la teoria della polarità (che esula dal contenuto di questo corso) si possono trovare facilmente gli asintoti di un'iperbole che sono le polari dei punti impropri dell'iperbole, l'asse di una parabola, che è la polare del punto improprio avente direzione ortogonale all'asse della parabola, ed il centro di una conica a centro le cui coordinate sono le soluzioni del sistema $\partial f/\partial x=0$, $\partial f/\partial y=0$.