

<b>ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE</b> <b>Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Appello del 15 settembre 2015</b>		
<b>Cognome:</b>	<b>Nome:</b>	<b>Matricola:</b>

**Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.**

1. Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare definita come

$$f((x \ y \ z)^T) = (x + y + z, 2x + 2y, x + 2z)^T.$$

- (a) Scrivere la matrice che rappresenta l'applicazione rispetto alla base canonica.
- (b) Verificare se l'applicazione è diagonalizzabile.
- (c) Verificare se l'applicazione è un automorfismo ed in tal caso determinare l'applicazione inversa.

2. Si considerino i seguenti tre vettori in  $\mathbb{R}^4$  dipendenti dal parametro  $k$ :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ k \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \\ k \end{pmatrix}.$$

- Calcolare la dimensione del sottospazio vettoriale  $V_k \subset \mathbb{R}^4$  generato dai tre vettori.
- Calcolare la proiezione ortogonale del vettore  $\mathbf{w} = (1 \ 2 \ 3 \ 4)^T$  su  $V_0$ , rispetto al prodotto scalare standard di  $\mathbb{R}^4$ .

3. Fissato un sistema di riferimento ortonormale nel piano, si consideri il fascio di coniche :

$$C_k : kx^2 + 2(1 - k)xy + ky^2 - 2kx + 2(k - 1)y = 0.$$

- (a) Classificare le coniche del fascio al variare di  $k$  in  $\mathbb{R}$ .
- (b) Trovare le equazioni cartesiane delle rette componenti le coniche degeneri del fascio.
- (c) Trovare i punti base del fascio.

## Soluzioni

1. (a) La matrice che rappresenta l'applicazione rispetto alla base canonica  $S$  di  $\mathbb{R}^3$  è

$$A = ( f(\mathbf{e}_1)|_S \quad f(\mathbf{e}_2)|_S \quad f(\mathbf{e}_3)|_S ) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (b) Il polinomio caratteristico di  $f$  è

$$P_f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 1)$$

e quindi gli autovalori sono

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Avendo tre autovalori reali distinti, l'applicazione  $f$  è diagonalizzabile in  $\mathbb{R}^3$ .

- (c) Essendo i tre autovalori di  $f$  diversi da zero, l'applicazione è invertibile ed è quindi un automorfismo di  $\mathbb{R}^3$ . L'applicazione inversa  $f^{-1}$  è rappresentata, rispetto alla base canonica  $S$ , dalla matrice inversa di  $A$ , che possiamo calcolare utilizzando ad esempio l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} (A|I) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) = (I|A^{-1}). \end{aligned}$$

2. (a) La dimensione dello spazio vettoriale è pari al rango della matrice avente come colonne i tre vettori:

$$\dim(V_k) = r \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & k \\ k & 1 & 1 \\ 1 & k & k \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 1-k^2 & 0 \\ 0 & 1-k^2 & 1-k \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 1-k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo considerare i seguenti casi:

- se  $k \neq \pm 1$  allora  $\dim(V_k) = 3$ ;
- se  $k = 1$  allora  $\dim(V_k) = 1$ ;
- se  $k = -1$  allora  $\dim(V_k) = 2$ .

- (b) Per prima cosa è necessario trovare una base ortogonale di  $V_0$ , utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_3 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_3 \rangle}{\|\mathbf{u}_2\|^2} \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La proiezione ortogonale  $\mathbf{w}_0$  di  $\mathbf{w}$  su  $V_0$  è quindi

$$\mathbf{w}_0 = \frac{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 + \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{u}_2\|^2} \mathbf{u}_2 + \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{u}_3\|^2} \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3. (a) La classificazione di  $\mathcal{C}_k$  può essere compiuta utilizzando gli invarianti metrici delle coniche:

$$I_1 = \text{Tr} \begin{pmatrix} k & 1-k \\ 1-k & k \end{pmatrix} = 2k, \quad I_2 = \begin{vmatrix} k & 1-k \\ 1-k & k \end{vmatrix} = 2k-1,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} k & 1-k & -k \\ 1-k & k & k-1 \\ -k & k-1 & 0 \end{vmatrix} = k(1-2k).$$

Segue che:

- $k < \frac{1}{2}$  e  $k \neq 0$ :  $I_3 \neq 0$  e  $I_2 < 0$  quindi  $\mathcal{C}_k$  è un'iperbole;
- $k > \frac{1}{2}$ :  $I_2 > 0$  e  $I_1 I_3 < 0$  quindi  $\mathcal{C}_k$  è un'ellisse con punti reali;
- $k = 0, \frac{1}{2}$ :  $I_3 = 0$  quindi  $\mathcal{C}_k$  è una coppia di rette.

La classificazione completa dei due casi degeneri è contenuta nel punto successivo.

(b) Le equazioni delle rette componenti le due coniche degeneri le otteniamo fattorizzando i relativi polinomi.

$$\mathcal{C}_0 : 2xy - 2y = 2y(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 : y = 0, \quad r_2 : x - 1 = 0;$$

$$\mathcal{C}_{\frac{1}{2}} : \frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 - x + y = \frac{1}{2}(x+y)^2 - (x+y) = \frac{1}{2}(x+y)(x+y-2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad s_1 : x + y = 0, \quad s_2 : x + y - 2 = 0.$$

Di conseguenza abbiamo che  $\mathcal{C}_0$  è l'unione di due rette reali incidenti (ed in particolare perpendicolari), mentre  $\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$  è l'unione di due rette reali parallele.

(c) I quattro punti base si possono trovare come intersezione di una qualsiasi coppia di coniche del fascio. In particolare possiamo intersecare le coniche degeneri e quindi le rette che le costituiscono:  $P_{ij} = r_i \cap s_j$ ,  $i, j = 1, 2$ .

$$P_{11} : \begin{cases} y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow P_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{12} : \begin{cases} y = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow P_{12} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{21} : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow P_{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$P_{22} : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow P_{22} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$