Matrici reali simmetriche e teorema spettrale

Matrici ortogonalmente diagonalizzabili

- Una matrice quadrata A si dice *ortogonalmente diagonalizzabile* se esiste una matrice ortogonale U tale che $U^{-1}AU=\mathrm{diag}\,(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, ovvero $U^TAU=\mathrm{diag}\,(a_1,a_2,\ldots,a_n)$.
- ➢ Ovviamente $a_1,a_2,\ldots,a_n$ sono gli autovalori di A
- Se A è ortogonalmente diagonalizzabile, è simmetrica.
  - $A=U\mathrm{diag}\,(a_1,a_2,\ldots,a_n)U^T$, e quindi $A^T=(U^T)^T(\mathrm{diag}\,(a_1,a_2,\ldots,a_n))^TU^T$ da cui $A^T=U\mathrm{diag}\,(a_1,a_2,\ldots,a_n)U^T=A$.
- Chiaramente, se A è ortogonalmente diagonalizzabile in R, A è reale.

Da ora in poi, se non diversamente specificato supporremo A matrice reale.

- A è ortogonalmente diagonalizzabile (in R) se e solo se R^n ammette una base ortonormale di autovettori di A.

Matrici reali simmetriche

- Ogni autovalore di una matrice reale simmetrica A è reale.
  - Sia λ una radice (eventualmente complessa) del polinomio caratteristico di A. Sia $\underline{v}$ un vettore non nullo tale che $A\underline{v}=\lambda\underline{v}$. Sia $\bar{\lambda}$ il complesso coniugato di λ e per ogni matrice (vettore) C indichiamo con $\bar{C}$ la matrice (vettore) dello stesso tipo di C i cui i cui elementi sono i complessi coniugati dei corrispondenti elementi di C. Si ha $(A\underline{v})^T\bar{\underline{v}} = \underline{v}^T A^T \bar{\underline{v}} = \underline{v}^T A \bar{\underline{v}} = \underline{v}^T \bar{A}\bar{\underline{v}} = \underline{v}^T(\overline{A\underline{v}})$, da cui $(\lambda\underline{v})^T\bar{\underline{v}} = \underline{v}^T(\overline{\lambda\underline{v}})$ e quindi $\lambda(\underline{v}^T\bar{\underline{v}})=\bar{\lambda}(\underline{v}^T\bar{\underline{v}})$, cioè $\lambda = \bar{\lambda}$.

➢ Una matrice reale simmetrica di ordine n ha n autovalori reali , quando ogni autovalore è contato con la propria molteplicità (algebrica).

- Sia A una matrice simmetrica reale e siano λ e μ due autovalori distinti di A. Due qualsiasi autovettori $\underline{v}$, $\underline{w}$ di A associati rispettivamente agli autovalori distinti λ e μ sono fra loro ortogonali.
  - $(A\underline{v})^T\underline{w}=(\lambda\underline{v})^T\underline{w}=\lambda\underline{v}^T\underline{w}$ ed anche $A\underline{v}^T\underline{w}=\underline{v}^T A^T\underline{w}=\underline{v}^T A\underline{w}=\underline{v}^T(\mu\underline{w})=\mu\underline{v}^T\underline{w}$. Dunque $\lambda\underline{v}^T\underline{w} = \mu\underline{v}^T\underline{w}$, ovvero $(\lambda-\mu)\,\underline{v}^T\underline{w}=0$ da cui essendo $\lambda\neq\mu$ si ottiene $\underline{v}^T\underline{w}=0$.

Teorema spettrale (o degli assi principali)

- Una matrice quadrata è ortogonalmente diagonalizzabile in R se e solo se è simmetrica e reale
  - Parte ≪solo se≫: $A=U\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_n)U^T$ è reale per ché U è reale e i λ_i sono reali , essendo A diagonalizzabile in R, inoltre è già stato provato che A è simmetrica.
  - Parte ≪se≫: Si dimostra per induzione sull'ordine n della matrice reale e simmetrica A.
    - Caso base: n=1, il teorema è banalmente vero in quanto A stessa è diagonale
    - Ipotesi di induzione : ogni matrice di ordine n-1 reale e simmetrica è ortogonalmente diagonalizzabile
    - Sia A simmetrica reale di ordine n. Sia λ un suo autovalore (che è reale) e sia $\underline{q}_1$ un autovettore di norma 1 associato a λ. Completiamo $\underline{q}_1$ a una base ortonormale $B=\{\underline{q}_1,\underline{q}_2,\dots,\underline{q}_n\}$ di R^n. La matrice $Q=[\underline{q}_1|\underline{q}_2|\dots|\underline{q}_n]$ è una matrice ortogonale. Sia $C=Q^TAQ=Q^{-1}AQ$. La matrice C è simmetrica infatti $C^T=(Q^TAQ)^T=Q^TA^T(Q^T)^T=Q^TAQ=C$. Inoltre C, essendo simile ad A, rappresenta la trasformazione f_A rispetto alla base *B*, la prima colonna di C è quindi formata dalle componenti di $f_A(\underline{q}_1)$ rispetto alla base *B* e quindi ha la prima componente uguale a λ e le restanti componenti nulle. Pertanto $C=\begin{bmatrix}\lambda & \underline{0}^T \\ \underline{0} & A'\end{bmatrix}$ dove A' è una matrice quadrata reale simmetrica di ordine n-1.

Teorema spettrale (2)

Per ipotesi di induzione A' è ortogonalmente diagonalizzabile, quindi esiste una matrice ortogonale U di ordine n-1, tale che $U^TA'U=D'$ con D' matrice diagonale. Sia $R=\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0^T \\ \hline 0 & U \end{array}\right]$. R è una matrice ortogonale ed inoltre $R^TCR=\left[\begin{array}{c|c} \lambda & 0^T \\ \hline 0 & D' \end{array}\right]=D$ matrice diagonale. Quindi si ha $R^TQ^TAQR=D$, ovvero $(QR)^TA(QR)=D$, dove QR ,essendo prodotto di due matrici ortogonali, è ortogonale, pertanto A è ortogonalmente diagonalizzabile.

- Ogni autovalore di una matrice reale simmetrica è regolare.
- Siano A una matrice quadrata reale simmetrica di ordine n, $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_h$ i suoi autovalori distinti e $V_1,V_2,\dots,V_h$ gli autospazi ad essi associati . Indichiamo con $B_1,B_2,\dots,B_h$ delle basi ortonormali di tali autospazi, allora
  - $B=B_1\cup B_2\cup\dots\cup B_h$ è una base ortonormale di R^n formata da autovettori,
  - $R^n= V_1\oplus V_2\oplus\dots\oplus V_h$,
  - gli autospazi $V_1,V_2,\dots,V_h$ sono a due a due ortogonali.

Decomposizione spettrale

- Siano A una matrice quadrata reale simmetrica di ordine n, $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_h$ i suoi autovalori distinti, $V_1,V_2,\dots,V_h$ gli autospazi ad essi associati e $P_1,P_2,\dots,P_h$ le matrici delle proiezioni ortogonali su $V_1,V_2,\dots,V_h$, allora
  - $I_n=P_1+P_2+\dots+P_h$
  - $A=\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2+\dots+\lambda_h P_h$
  - Per ogni i, j con $1\le i,j\le h$ ed $i\neq j$, $P_i^T=P_i$, $P_i^2=P_i$, $P_iP_j=\underline{0}_{n\times n}$.
    - Sia $\underline{v}$ un generico vettore di R^n, $\underline{v}$ si scrive in uno e un sol modo nelle forma $\underline{v}=\underline{v}_1+\underline{v}_2+\dots+\underline{v}_h$ con $\underline{v}_i\in V_i$ per ogni i con $1\le i\le h$. Inoltre ogni $\underline{v}_i$ è la proiezione ortogonale di $\underline{v}$ su V_i perché $\underline{v}-\underline{v}_i\perp V_i$ e dunque $\underline{v}_i=P_i\underline{v}$. Da cui abbiamo $I_n\underline{v}=P_1\underline{v}+P_2\underline{v}+\dots+P_h\underline{v}=(P_1+P_2+\dots+P_h)\underline{v}$ e quindi $I_n=P_1+P_2+\dots+P_h$.
    - Si ha, moltiplicando a sinistra per A, $A\underline{v}=A(P_1\underline{v}+P_2\underline{v}+\dots+P_h\underline{v})=\lambda_1P_1\underline{v}+\dots+\lambda_hP_h\underline{v}$, in quanto ogni $P_i\underline{v}$ appartiene all'autospazio di λ_i , pertanto $A\underline{v}=(\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\dots+\lambda_hP_h)\underline{v}$ e quindi $A=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\dots+\lambda_hP_h$. O
    - Ovviamente per ogni i si ha $P_i^T=P_i$, $P_i^2=P_i$, inoltre se $i\neq j$ per ogni $\underline{v}\in R^n$ si ha $P_j\underline{v}\in V_j$ e quindi $P_i(P_j\underline{v})=(P_iP_j)\underline{v}=\underline{0}$, da cui $P_iP_j=\underline{0}_{n\times n}$.

Endomorfismi simmetrici

Dato uno spazio euclideo V (con prodotto scalare < , >) un endomorfismo $f:V\rightarrow V$ si dice *simmetrico* se per ogni $\underline{u},\underline{v} \in V$ si ha $\langle f(\underline{u}),\underline{v}\rangle = \langle \underline{u},f(\underline{v})\rangle$.

- Un endomorfismo è simmetrico se e solo se rispetto ad ogni base ortogonale di V è rappresentato da una matrice simmetrica.
  - Infatti se ci riferiamo a una base ortogonale B, il prodotto scalare è il prodotto standard e dunque se A è la matrice che rappresenta f rispetto alla base si ha $(A\underline{u})^T\underline{v}=\underline{u}^TA\underline{v}$, quindi $\underline{u}^TA^T\underline{v}=\underline{u}^TA\underline{v}$ e $A=A^T$. Viceversa se rispetto a una base ortogonale f è rappresentato da una matrice simmetrica A si ha subito $\underline{u}^TA^T\underline{v}=\underline{u}^TA\underline{v}$ e quindi $\langle f(\underline{u}),\underline{v}\rangle=\langle \underline{u},f(\underline{v})\rangle$.
- Se un endomorfismo rispetto ad una base ortogonale è rappresentato da una matrice simmetrica allora è rappresentato da una matrice simmetrica rispetto ad ogni base ortogonale
  - Immediata conseguenza del teorema spettrale e del fatto che una isometria lineare è sempre rappresentata da una matrice ortogonale.

Endomorfismi rappresentati da matrici ortogonali simmetriche

- Sia U una matrice ortogonale e simmetrica di ordine n. U rappresenta sempre una simmetria ortogonale rispetto ad un sottospazio di R^n.
  - U ha n autovalori reali, perché è una matrice reale simmetrica, e tali autovalori sono 1 o -1 perché U è ortogonale. Sia d la molteplicità algebrica dell'autovalore 1 , -1 ha allora molteplicità algebrica n-d. L'autospazio V_1 associato all'autovalore 1 ha dimensione d e l'autospazio V_2 associato all'autovalore -1 ha dimensione n-d. La trasformazione rappresentata da U tiene fermi i vettori appartenenti a V_1 (autospazio di 1) e cambia il verso dei vettori appartenenti a V_2 (autospazio di -1, ortogonale a V_1) e quindi è una simmetria (riflessione) ortogonale rispetto a V_1.
- Avevamo trovato direttamente questo risultato per matrici ortogonali simmetriche di ordine 2 o 3.
- La matrice di una simmetria ortogonale è $I-2P_2$ ove P_2 è la matrice proiezione sull' autospazio di U associato a -1.
  - Infatti per la decomposizione spettrale $U=P_1-P_2$ e $I=P_1+P_2$ da cui $U=I_n-2P_2$.

Sommario

Abbiamo imparato

- cosa è una matrice ortogonalmente diagonalizzabile,
- il teorema spettrale che caratterizza le matrici ortogonalmente diagonalizzabili in R,
- la decomposizione spettrale
- le caratteristiche degli endomorfismi simmetrici , delle matrici che li rappresentano rispetto a una base ortogonale e il loro significato geometrico