

Algebra delle applicazioni lineari

Siano $f: V \rightarrow W$ e $g: V \rightarrow W$ due applicazioni lineari e $t \in K$

- $f+g: V \rightarrow W$ definita da $(f+g)(\underline{v})=f(\underline{v})+g(\underline{v})$ per ogni $\underline{v} \in V$ è un'applicazione lineare
 - $tf: V \rightarrow W$ definita da $(tf)(\underline{v})=tf(\underline{v})$ per ogni $\underline{v} \in V$ è un'applicazione lineare
- L'insieme $\text{Hom}_K(V,W)$ delle applicazioni lineari di V in W costituiscono uno spazio vettoriale sul campo K rispetto alla operazioni sopra definite.
- $\text{Hom}_K(V,V)$ è anche indicato con $\text{End}_K(V)$.
 - L'insieme $\text{Hom}_K(V,K)$ delle forme lineari di V è uno spazio vettoriale su K chiamato *spazio duale* di V .

Prodotto di applicazioni lineari

- Siano V, W, U spazi vettoriali su K e siano $f: V \rightarrow W, g: W \rightarrow U$ due applicazioni lineari. La funzione $g \circ f: V \rightarrow U$ definita da $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ per ogni $\underline{v} \in V$ si dice *prodotto* di f per g ed è un'applicazione lineare
- Si ha $I_W \circ f = f \circ I_V = f$.
- Una funzione $f: V \rightarrow W$ si dice *invertibile* se esiste una funzione $g: W \rightarrow V$ tale che $I_V = g \circ f$ e $I_W = f \circ g$. In tal caso g si chiama *funzione inversa* di f e si denota con f^{-1} . f^{-1} esiste se e solo se f è biunivoca
 - f^{-1} è definita da $f^{-1}(\underline{w}) = \underline{v}$ se $f(\underline{v}) = \underline{w}$
- Se $f: V \rightarrow W$ è un'applicazione lineare biunivoca (isomorfismo), allora f^{-1} è un'applicazione lineare (biunivoca). Se $f: V \rightarrow W$ è un isomorfismo V e W si dicono *spazi isomorfi*.
- Due spazi vettoriali di dimensione finita sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione n ed in tal caso sono tutti isomorfi a K^n .

Applicazioni lineari di K^m in K^n associate ad una matrice

- Siano $f_A: K^n \rightarrow K^m$ e $f_B: K^n \rightarrow K^m$ applicazioni lineari associate rispettivamente alle matrici A e B di tipo (m,n) , l'applicazione somma è associata alla matrice $A+B$
- Siano $f_A: K^n \rightarrow K^m$ e $f_B: K^m \rightarrow K^r$ applicazioni lineari associate rispettivamente alla matrice A di tipo (m,n) e alla matrice B di tipo (r,m) , l'applicazione prodotto $f_B \circ f_A$ è associata alla matrice BA .
- Se $f_A: K^n \rightarrow K^m$ è l'applicazione lineare associata alla matrice A per ogni h , $1 \leq h \leq n$, la colonna h -esima di A è l'immagine del vettore $\underline{e}_h \in K^n$ (h -esimo vettore della base canonica di K^n , ovvero vettore che ha 1 come componente h -esima e tutte le altre componenti nulle).
- Siano A, B due matrici di tipo rispettivamente (m,n) ed (r,m) , allora $\text{rk}(BA) \leq \min(\text{rk}(A), \text{rk}(B))$.
 - Siano $f_A: K^n \rightarrow K^m$, $f_B: K^m \rightarrow K^r$ e $f_B \circ f_A: K^n \rightarrow K^r$.
 $\text{Im } f_B \circ f_A = f_B(f_A(K^n))$ è un sottospazio di $f_B(K^m) = \text{Im } f_B$ quindi $\dim \text{Im } f_B \circ f_A = \text{rk}(BA) \leq \dim \text{Im } f_B = \text{rk}(B)$.
 - Inoltre $\dim f_B(f_A(K^n)) \leq \dim f_A(K^n)$ e dunque $\dim \text{Im } f_B \circ f_A \leq \dim \text{Im } f_A$ da cui $\text{rk}(BA) \leq \text{rk}(A)$.

Conseguenze del teorema di rappresentazione

- Siano V e W due spazi vettoriali con $\dim V=n$ e $\dim W=n$ e siano B e C due basi rispettivamente di V e W . La funzione G che associa ad ogni applicazione lineare $f: V \rightarrow W$ la matrice che rappresenta f rispetto alle basi B e C è un isomorfismo dello spazio vettoriale $\text{Hom}_K(V,W)$ nello spazio vettoriale $M_K(m,n)$ delle matrici di tipo (m,n) ad elementi in K .
- Sia $f: V \rightarrow W$ un' applicazione lineare, con V, W spazi vettoriali di dimensione finita. Siano B, B' due basi di V e C, C' due basi di W . Sia $M_{B,C}(f) = A$ la matrice che rappresenta f rispetto alle basi B, C e siano $S = M_{B',B}(I_V)$ e $T = M_{C',C}(I_W)$ le matrici di passaggio dalla base B alla base B' e dalla base C alla base C' rispettivamente. Allora $M_{B',C'}(f) = T^{-1}AS$ è la matrice che rappresenta f rispetto alle basi B' e C' .

Sommario

Abbiamo imparato:

- cosa sono somma e prodotto di applicazioni lineari;
- come sono legate le matrici che le rappresentano;
- che due spazi sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione e quindi ogni spazio di dimensione n è isomorfo a K^n ;
- come sono legate matrici che rappresentano la stessa applicazione lineare rispetto a basi diverse.