

Osservazioni

- Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita n ogni suo sottospazio ha dimensione $m \leq n$.
- Se H è un sottospazio di V e $\dim H = \dim V = n$ allora $H = V$.
 - Sia $B = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ una base di H , i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ sono vettori linearmente indipendenti di V e quindi sono una base di V , per cui $V = L(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n) = H$.
- Per ogni spazio vettoriale V e per ogni intero d con $0 \leq d < \dim V$ esiste un sottospazio di V di dimensione d . In particolare se V non ha dimensione finita ammette un sottospazio di dimensione d per ogni intero $d \geq 0$.
 - Se $d=0$ il sottospazio sarà $\{0\}$, altrimenti basta prendere d vettori linearmente indipendenti in V e considerare lo spazio vettoriale generato da quei vettori.

Sottospazi di K^n

- Come si rappresenta un sottospazio di dimensione $d (< n)$ di K^n ?

- Se è nota una base $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_d\}$ del sottospazio, tale sottospazio è $L(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_d)$. Si scrivono le coordinate di un generico vettore di $L(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_d)$ ottenendo n equazioni con d parametri (che sono i coefficienti della combinazione lineare), tali equazioni si dicono equazioni *parametriche del sottospazio*.

- Si considera la matrice B di tipo (d, n) le cui righe sono i vettori $(\underline{v}_1)^T, \dots, (\underline{v}_d)^T$ e si considera una base $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-d}\}$ dello spazio $\ker B$, che ha dimensione $n-d$ perché $\text{rk}(B)=d$. Sia A la matrice di tipo $(n-d, n)$ le cui righe sono i vettori $(\underline{a}_1)^T, \dots, (\underline{a}_{n-d})^T$. Lo spazio $\ker A$ è un sottospazio di K^n di dimensione d , poiché $\text{rk}(A)=n-d$, ed è generato proprio da $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_d\}$. In questo modo il sottospazio viene rappresentato come $\ker A$, ovvero con $n-d$ equazioni lineari omogenee in n variabili, tali equazioni si dicono *equazioni cartesiane del sottospazio*.

- Se consideriamo lo spazio vettoriale R^3 (riferito ad un sistema di riferimento con origine O) i sottospazi di R^3 di dimensione 2 rappresentano geometricamente piani passanti per O e quelli di dimensione 1 rappresentano rette uscenti da O .
- Se consideriamo lo spazio vettoriale R^2 (riferito ad un sistema di riferimento con origine O) i sottospazi di R^2 di dimensione 1 rappresentano geometricamente le rette del piano uscenti da O .

xché un syst omog ha soluz che sono comb lin di n-d vettori

d è il rango di B e n-d rapp

il numero di variabili libere per cui le sol saranno comb lin rispetto ai vettori con queste variabili, ossia ∞^{n-d} soluz

Operazioni fra sottospazi

Siano V uno spazio vettoriale sul campo K ed H e W due sottospazi di V

$$H \cap W = \begin{cases} v_1 + v_2 \in H \\ v_1 + v_2 \in W \end{cases}$$

- L'intersezione insiemistica $H \cap W$ è un sottospazio di V (e di H e W).
 - Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in H \cap W$ e $t \in K$. Poiché $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in H$ ed H è un sottospazio $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in H$ e $t\underline{v}_1 \in H$, analogamente poiché $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in W$ e W è un sottospazio $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in W$ e $t\underline{v}_1 \in W$, quindi $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in H \cap W$ e $t\underline{v}_1 \in H \cap W$.
- L'unione insiemistica $H \cup W$ non è in generale un sottospazio di V .
- La somma $H+W = \{\underline{h} + \underline{w} \mid \underline{h} \in H, \underline{w} \in W\}$ di H e W è un sottospazio di V ed è il minimo sottospazio che contiene H e W .
 - Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in H+W$ e $t \in K$. Esistono $\underline{h}_1, \underline{h}_2 \in H$, $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W$ tali che $\underline{v}_1 = \underline{h}_1 + \underline{w}_1$, $\underline{v}_2 = \underline{h}_2 + \underline{w}_2$ e quindi $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = (\underline{h}_1 + \underline{w}_1) + (\underline{h}_2 + \underline{w}_2) = (\underline{h}_1 + \underline{h}_2) + (\underline{w}_1 + \underline{w}_2)$ con $\underline{h}_1 + \underline{h}_2 \in H$, $\underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W$, quindi $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in H+W$. Analogamente si ha $t\underline{v}_1 = t(\underline{h}_1 + \underline{w}_1) = t\underline{h}_1 + t\underline{w}_1$ con $t\underline{h}_1 \in H$, $t\underline{w}_1 \in W$, quindi $t\underline{v}_1 \in H+W$. Dunque $H+W$ è sottospazio. Inoltre, essendo $\underline{h} = \underline{h} + \underline{0}$ per ogni $\underline{h} \in H$ e considerando $\underline{0} \in W$, si ha $H \subseteq H+W$ ed analogamente, essendo $\underline{w} = \underline{0} + \underline{w}$ per ogni $\underline{w} \in W$ e considerando $\underline{0} \in H$, si ha $W \subseteq H+W$. Sia poi U un sottospazio di V tale che $H \subseteq U$ e $W \subseteq U$, allora poiché ogni $\underline{h} \in H$ appartiene ad U ed ogni $\underline{w} \in W$ appartiene ad U , si ha $\underline{h} + \underline{w} \in U$, dunque $H+W \subseteq U$.
- Se H e W hanno dimensione finita, l'unione di un insieme di generatori di H e di un insieme di generatori di W è un insieme di generatori di $H+W$.

Essere
in sottosp
di
contenere $\{0\}$

Formula di Grassmann

Siano H e W due spazi vettoriali di dimensione finita di V , allora si ha
 $\dim(H+W) + \dim(H \cap W) = \dim H + \dim W$.

- Sia $\dim H = n$, $\dim W = m$, allora $\dim(H \cap W) = d$, con $d \leq n$, $d \leq m$.
- Sia $\{v_1, v_2, \dots, v_d\}$ una base di $H \cap W$, per il teorema di completamento della base esistono $u_1, \dots, u_{n-d} \in H$ e $w_1, \dots, w_{m-d} \in W$ tali che $\{v_1, \dots, v_d, u_1, \dots, u_{n-d}\}$ sia una base di H e $\{v_1, \dots, v_d, w_1, w_2, \dots, w_{m-d}\}$ sia una base di W . Dunque $H+W$ ha $\{v_1, \dots, v_d, u_1, \dots, u_{n-d}, w_1, \dots, w_{m-d}\}$ come insieme di generatori.
- Sia $a_1 v_1 + \dots + a_d v_d + b_1 u_1 + \dots + b_{n-d} u_{n-d} + c_1 w_1 + \dots + c_{m-d} w_{m-d} = \underline{0}$, allora $a_1 v_1 + \dots + a_d v_d + b_1 u_1 + \dots + b_{n-d} u_{n-d} = -c_1 w_1 - \dots - c_{m-d} w_{m-d}$ è un vettore di $H \cap W$ e quindi si può scrivere come combinazione lineare di v_1, v_2, \dots, v_d . Dunque $-c_1 w_1 - \dots - c_{m-d} w_{m-d} = k_1 v_1 + \dots + k_d v_d$ e quindi $c_1 w_1 + \dots + c_{m-d} w_{m-d} + k_1 v_1 + \dots + k_d v_d = \underline{0}$ da cui, essendo $\{v_1, \dots, v_d, w_1, \dots, w_{m-d}\}$ un insieme di vettori linearmente indipendenti, si ottiene $c_1 = \dots = c_{m-d} = 0$. Pertanto si ha anche $a_1 v_1 + \dots + a_d v_d + b_1 u_1 + \dots + b_{n-d} u_{n-d} = \underline{0}$ da cui, essendo $\{v_1, \dots, v_d, u_1, \dots, u_{n-d}\}$ un insieme di vettori linearmente indipendenti, si ottiene $a_1 = \dots = a_d = b_1 = \dots = b_{n-d} = 0$. Quindi $\{v_1, \dots, v_d, u_1, \dots, u_{n-d}, w_1, \dots, w_{m-d}\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti e dunque una base di $H+W$. Si ha allora $\dim(H+W) = n+m-d$.

sono il numero di vettori

non è all'inters

$H \cap W$

vettore $\in W \cap H$



quindi anche

è un vettore di $W \cap H$ e quindi si può scrivere come comb della base di $W \cap H$ ossia v_1, \dots, v_d

Somma diretta di sottospazi

- V si dice *somma diretta* di H e W , $V=H\oplus W$, se per ogni vettore $\underline{v} \in V$ esistono e sono unici due vettori $\underline{h} \in H$ e $\underline{w} \in W$ tali che $\underline{v}=\underline{h}+\underline{w}$.
- $V=H\oplus W$ se e solo se $V=H+W$ e $H\cap W=\{\underline{0}\}$
 - Sia $V=H\oplus W$. Ovviamente $V=H+W$. Sia $\underline{j} \in H\cap W$, allora $\underline{v}=\underline{h}+\underline{w}=(\underline{h}+\underline{j})+(\underline{w}-\underline{j})$ dove $\underline{h}+\underline{j} \in H$, $\underline{w}-\underline{j} \in W$. Per l'unicità della scrittura di \underline{v} si ha allora $\underline{h}=\underline{h}+\underline{j}$ da cui $\underline{j}=\underline{0}$.
 - Sia $V=H+W$ e $H\cap W=\{\underline{0}\}$, allora ovviamente per ogni vettore $\underline{v} \in V$ esistono due vettori $\underline{h} \in H$ e $\underline{w} \in W$ tali che $\underline{v}=\underline{h}+\underline{w}$. Sia poi $\underline{v}=\underline{h}+\underline{w}=\underline{h}'+\underline{w}'$, allora $\underline{h}-\underline{h}'=\underline{w}'-\underline{w}$ appartiene a $H\cap W$ e quindi $\underline{h}-\underline{h}'=\underline{w}'-\underline{w}=\underline{0}$ da cui $\underline{h}=\underline{h}'$, $\underline{w}=\underline{w}'$.
- Se $V=H\oplus W$, V ha dimensione finita se e solo se H e W hanno dimensione finita e in particolare $\dim V=\dim H+\dim W$.
- Se $V=H\oplus W$, W si dice *spazio complementare* di H (e H spazio complementare di W)
- Se V ha dimensione finita ed H è un suo sottospazio, esiste sempre lo spazio complementare di H .
 - Presa una base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_s\}$ di H , la si completa ad una base $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_s, \underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_r\}$ di V e si ha $W=L(\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_r)$.

Spazio di dimensione n sul campo K

- Sia V uno spazio vettoriale su K di dimensione n e sia $B = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ una base di V . Sappiamo che ogni vettore $\underline{v} \in V$ si può scrivere in uno e un sol modo nella forma $\underline{v} = x_1 \underline{v}_1 + x_2 \underline{v}_2 + \dots + x_n \underline{v}_n$; gli scalari x_1, x_2, \dots, x_n si chiamano componenti di \underline{v} rispetto alla base B . Il vettore \underline{v} può

essere quindi identificato con il vettore $\underline{v}|_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in K^n$

- E' immediato verificare che per ogni $\underline{v}, \underline{w} \in V$ e per ogni $t \in K$ si ha $(\underline{v} + \underline{w})|_B = \underline{v}|_B + \underline{w}|_B$ e $(t\underline{v})|_B = t(\underline{v}|_B)$
- Ogni spazio vettoriale V di dimensione n sul campo K può essere identificato (una volta fissata una base di V) con lo spazio vettoriale K^n dei vettori di tipo $(n,1)$ su K .
- $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_h$ sono vettori linearmente indipendenti di V se e solo se $\underline{w}_1|_B, \underline{w}_2|_B, \dots, \underline{w}_h|_B$ sono vettori linearmente indipendenti di K^n .

Rango (per righe) di una matrice A

Sia A una matrice di tipo (m,n) e siano $\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_m$ i vettori riga di A e $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_n$ i vettori colonna di A.

Poniamo $\text{Row } A = L(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_m) \subseteq K^n$ e $\text{Col } A = L(\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_n) \subseteq K^m$.

- Sia A' una matrice a scala ottenuta da A per eliminazione di Gauss. Si ha $\text{Row } A = \text{Row } A'$.
 - Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$ vettori di un qualsiasi spazio vettoriale V su K e $t \in K$, allora $\dim L(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m) = \dim L(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_i + t\underline{v}_j, \dots, \underline{v}_m)$
 - Da quanto sopra una mossa di Gauss non cambia lo spazio generato dalle righe di una matrice e quindi ne conserva la dimensione.
- $\text{rk}(A) = \dim \text{Row } A$, in altre parole il rango di A è il massimo numero di righe linearmente indipendenti di A.
 - Sia A' una matrice a scala ottenuta da A per eliminazione di Gauss, allora $\text{rk}(A) = \text{rk}(A')$
 - $\dim \text{Row } A = \dim \text{Row } A'$
 - $\dim \text{Row } A' = \text{rk}(A')$
- Sia A una matrice di n colonne su K, allora $\text{rk}(A) + \dim \ker A = n$ (Teorema di nullità più rango)
 - Conseguenza immediata del teorema di Rouché Capelli.

↙ xché
 $\dim \ker A = n - \text{rk } A$

Rango (per colonne) di una matrice A

- $\text{Col } A = \{\underline{b} \mid A\underline{x} = \underline{b} \text{ è possibile}\}$
- Sia A' una matrice a scala ottenuta da A per eliminazione di Gauss, allora $\dim \text{Col } A = \dim \text{Col } A'$.
 - O si prova direttamente che una mossa di Gauss conserva la dimensione dello spazio delle colonne.
 - Oppure si osserva che i due sistemi lineari omogenei $A\underline{x} = \underline{0}$, $A'\underline{x} = \underline{0}$ sono equivalenti. Inoltre le soluzioni dei sistemi rappresentano esattamente i possibili coefficienti di una scrittura di $\underline{0}$ come combinazione lineare delle colonne della matrice dei coefficienti.
- Se A' è una matrice a scala $\text{rk}(A') = \dim \text{Col } A'$.
 - Le colonne che contengono i pivot sono una base di $\text{Col } A'$
- $\text{rk}(A) = \dim \text{Col } A$, in altre parole il rango di A è il massimo numero di colonne linearmente indipendenti di A .
 - $\dim \text{Col } A = \dim \text{Col } A' = \text{rk}(A')$
- $\text{rk}(A) = \text{rk}(A^T)$
- Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m, \underline{b} \in K^n$. I vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\text{rk}([\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \dots \mid \underline{v}_m]) = m$, \underline{b} è combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m$ se e solo se $\text{rk}([\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \dots \mid \underline{v}_m]) = \text{rk}([\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \dots \mid \underline{v}_m \mid \underline{b}])$

Regola di Kronecker

Sia A una matrice su K di tipo (m,n) e sia A' una sua sottomatrice

- Una sottomatrice A'' di A si dice ottenuta per orlatura da A' se si aggiunge una nuova riga ed una nuova colonna di A alle righe e colonne di A' scelte per formare A''
- Un *minore* di ordine r è il determinante di una sottomatrice quadrata di ordine r di A
- Sia $M = \det A'$ un minore di ordine r di A , un *minore orlato* di M è il determinante di una sottomatrice di A ottenuta per orlatura da A' , ovviamente ogni minore orlato di M ha ordine $r+1$.
- Una matrice A ha rango r se e solo se esiste un minore M di A diverso da 0 e di ordine r e tutti i minori orlati di M sono nulli.
 - Se A ha rango r , A ha r righe ed r colonne linearmente indipendenti e la sottomatrice di A fatta con quelle righe e con quelle colonne ha determinante diverso da 0 , inoltre $r+1$ righe ed $r+1$ colonne sono sempre dipendenti per cui ogni minore di ordine $r+1$ è nullo.
 - Se A ha un minore di ordine r diverso da 0 , le r righe che compaiono nel minore sono linearmente indipendenti e A ha rango $\geq r$. Una qualsiasi altra riga della matrice è combinazione lineare di tali righe, quindi r è il massimo numero di righe linearmente indipendenti di A e $\text{rk}(A)=r$

Sommario

Abbiamo imparato:

- come si rappresentano i sottospazi di uno spazio vettoriale di dimensione n ;
- cos'è lo spazio somma di due sottospazi di uno spazio V ;
- la formula di Grassman;
- quando uno spazio vettoriale è somma diretta di due suoi sottospazi;
- il teorema di nullità più rango per una matrice di tipo (m,n) ;
- cosa sono il rango per righe e per colonne di una matrice A ;
- che il rango per righe e per colonne coincidono e sono il rango di A definito precedentemente;
- la regola di Kronecker per calcolare il rango di una matrice.