Esame di Geometria e Algebra Lineare		
Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Prima prova in itinere 27 novembre 2015		
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.

1. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x - y + hz = h \\ hx + (h+1)y + z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

dove h è un parametro reale.

(a) Determinare gli eventuali valori di h per cui il sistema rappresenta tre piani appartenenti ad uno stesso fascio e, se tali valori esistono, determinare i parametri direttori della retta sostegno del fascio.

(b) Si provi che per $h = -1$ le prime due equazioni del sistema rappresentano una retta r complanare alla retta s di equazioni $x + y - z - 1 = y + z - 2 = 0$.

(c) Trovare l'equazione del piano che contiene sia la retta r sia la retta s.

Soluzione

(a) Il sistema lineare

$$\begin{cases} x - y + hz = h \\ hx + (h+1)y + z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

rappresenta tre piani di uno stesso fascio se e solo se ammette ∞^1 soluzioni, pertanto se e solo se il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa ed è 2.

Soluzione 1.

Il determinante della matrice dei coefficienti è $-3h - 3$ per cui per $h \neq -1$ la matrice dei coefficienti (e quella completa) hanno rango 3. Consideriamo allora il caso $h = -1$. Il sistema diventa

$$\begin{cases} x - y - z = -1 \\ -x + z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

e si vede subito che la terza equazione si ottiene sommando alla prima equazione moltiplicata per -1 la seconda moltiplicata per -2, pertanto il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x - y - z = -1 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

che ammette le soluzioni

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$$

ove t è un parametro arbitrario. Tali soluzioni rappresentano le equazioni di una retta che è la retta sostegno del fascio ed ha parametri direttori $(1, 0, 1)$.

Soluzione 2.
Riduciamo allora a scala la matrice completa del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & h & h \\ h & h+1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

scambiando prima e terza riga abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ h & h+1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & h & h \end{pmatrix}$$

da cui aggiungendo alla seconda riga la prima moltiplicata per -h e alla terza la prima moltiplicata per -1 si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+h & -h \\ 0 & -2 & 1+h & h-1 \end{pmatrix}$$

ed ancora aggiungendo alla terza riga la seconda moltiplicata per 2 otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+h & -h \\ 0 & 0 & 3(1+h) & -(1+h) \end{pmatrix},$$

si realizza subito che se $h \neq -1$ la matrice ha rango 3. Se invece $h = -1$ la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per cui sia la matrice dei coefficienti sia quella completa del sistema hanno rango 2, e le ∞^1 soluzioni del sistema sono $x = t, = 1., z = t$ e rappresentano la retta sostegno del fascio individuato dai 3 piani. Tale retta ha parametri direttori $(1, 0, 1)$.

(b) Dal punto precedente abbiamo già visto che le prime due equazioni per $h = -1$ formano un sistema lineare con matrice dei coefficienti di rango 2 e quindi rappresentano una retta r, che sempre per il punto precedente, giace anche sul piano $x + y - z - 1 = 0$. Anche la retta s giace sul piano $x + y - z - 1 = 0$ e quindi le due rette sono complanari.

(c) Come si vede facilmente dal punto precedente il piano che contiene entrambe le rette è $x + y - z = 1$.

Nota 1. Se non si fosse osservato che la retta r giace anche sul piano $x + y - z = 1$, si poteva procedere direttamente, cercando di vedere se le due rette r ed s sono parallele o incidenti. Poiché il sistema

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = t \\ x + y - z - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

ammette la soluzione $t = 1, x = 1, y = 1, z = 1$, le due rette sono incidenti nel punto P di coordinate $(1, 1, 1)$ e quindi complanari. Il piano comune alle due rette si trova allora scrivendo l'equazione del fascio di piani che ha per sostegno s, ovvero $\lambda(x+y-z-1)+\mu(y+z-2) = 0$, e cercando il piano del fascio che passa per un punto di r diverso da P ad esempio $(2, 1, 2)$. Si ha allora $0\lambda + 2\mu = 0$ ovvero $\mu = 0$ e il piano che contiene entrambe le rette risulta essere $x + y - z - 1 = 0$.

Nota 2. Nel testo originario, per un cut and paste errato le equazioni della retta s erano $x - y - z + 1 = y + z - 2 = 0$. Tali equazioni sono state modificate a voce in aula nelle equazioni dell'attuale testo. In aula C11 però è stato solo segnalato di modificare il segno del termine noto della prima equazione per cui la retta s risultava avere equazioni $x-y-z-1=y+z-2=0$. Tale retta è sghemba con r, infatti dal sistema

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = t \\ x - y - z - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

si ricava la contraddizione $-2 = 0$ per cui s non è incidente ad r e i parametri direttori di s risultano essere $(0, -1, 1)$ per cui s non è parallela ad r. Ovviamente questa risposta sarà considerata corretta e valutata come la coppia di risposte corrette agli ultimi due punti dell'esercizio.

2. Siano $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{\mathbf{v} = (x\ y\ z\ t)^T | x - y + t = y - z - 2t = 0\} \subset V$ e $W = L((1\ 0\ 2\ 0)^T, (0\ 1\ -1\ 1)^T) \subset V$.

   (a) Determinare le equazioni cartesiane del sottospazio W.

   (b) Determinare la dimensione e una base di U e W.

   (c) Determinare la dimensione e una base di $U + W$ e $U \cap W$.

Soluzione

(a) Per definizione $W = \{\mathbf{w} = (x\ y\ z\ t)^T | \mathbf{w} = h(1\ 0\ 2\ 0)^T + k(0\ 1\ -1\ 1)^T, h, k \in \mathbb{R}\}$ e quindi le equazioni parametriche dello spazio W sono

$$\begin{cases} x = h \\ y = k \\ z = 2h - k \\ t = k \end{cases}$$

da cui eliminando h e k si trovano le equazioni cartesiane di W

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ y - t = 0 \end{cases}$$

(b) Risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} x - y + t = 0 \\ y - z - 2t = 0 \end{cases}$$

si ottiene che il generico vettore di U ha la forma $(h+k\ h+2k\ h\ k)^T$ con h e k parametri reali. Pertanto U è generato dai due vettori $(1\ 1\ 1\ 0)^T, (1\ 2\ 0\ 1)^T$ che sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base per U. U ha dunque dimensione 2.
Per definizione W è generato dai due vettori $(1\ 0\ 2\ 0)^T, (0\ 1\ -1\ 1)^T$ che sono linearmente indipendenti, dunque costituiscono una base di W che pertanto ha dimensione 2.

(c) L'insieme $\{(1\ 1\ 1\ 0)^T, (1\ 2\ 0\ 1)^T, (1\ 0\ 2\ 0)^T, (0\ 1\ -1\ 1)^T\}$ è un insieme di generatori di $U + W$. Usiamo l'algoritmo degli scarti successivi, sappiamo già che i primi due vettori sono linearmente indipendenti, il terzo vettore non può essere combinazione dei primi due (per esserlo infatti dovrebbe essere il prodotto di uno scalare per il primo vettore). Il quarto vettore si ottiene facendo il secondo meno il terzo, quindi solo i vettori $\{(1\ 1\ 1\ 0)^T, (1\ 2\ 0\ 1)^T, (1\ 0\ 2\ 0)^T$ sono linearmente indipendenti e sono una base per $U + W$, che quindi ha dimensione 3. Per la formula di Grassmann allora la dimensione di $U \cap W$ è 1 e una sua base è formata dal vettore $(0\ 1\ -1\ 1)^T$ che come sappiamo appartiene a W e si scrive come combinazione lineare dei vettori della base di U e quindi appartiene ad U.

3. Sia $f_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare rappresentata dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & -h & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2h & -1 \end{pmatrix}$$

dove h è un parametro reale.

(a) Determinare al variare di h la dimensione e una base di $ker f_h$.

(b) Posto $h = 0$, dire se f_0 è un automorfismo di $\mathbb{R}^3$ e, in caso positivo, trovare la matrice che rappresenta f_0^{-1}.

(c) Posto $h = 1$, stabilire se $(0\ 1\ 0)^T \in Im f_1$.

Soluzione

(a) Essendo

$$det A_h = \begin{vmatrix} 1 & -h & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2h & -1 \end{vmatrix} = h - 1,$$

se $h \neq 1$ $rk A_h = 3$, dunque la dimensione di $ker f_h$ è 0 e $ker f_h$ non ha base. Se $h = 1$ la matrice diventa

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ed ha sicuramente rango 2, in quanto $det A_1 = 0$ e $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, pertanto per $h = 1$ $ker f_1$ ha dimensione 1 e una sua base è formata dal vettore $(-1\ 1\ 2)^T$.

(b) Per $h = 0$, di $ker f_0 = \{\mathbf{0}\}$ dunque f_0 è iniettiva, per il teorema di nullità più rango risulta dim $Im f_0 = 3$ e quindi $Im f_0 = \mathbb{R}^3$ ed f_0 è anche suriettiva, quindi f_0 è un automorfismo di $\mathbb{R}^3$. La applicazione f_0^{-1} ha come matrice associata la matrice inversa della matrice

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che rappresenta f_0. Usando il metodo di Gauss Jordan consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.,$$

togliendo dalla seconda riga la prima e moltiplicando la terza riga per -1 si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.,$$

da cui aggiungendo alla seconda riga la terza, e togliendo dalla prima riga la terza si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

da cui l'inversa di A_0 risulta essere

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) Il vettore $(0\ 1\ 0)^T$ appartiene a Imf_1 se e solo se il sistema $A_1\mathbf{x} = (0\ 1\ 0)^T$ è possibile. Poiché al punto 1 abbiamo visto che $rkA_1 = 2$ il sistema possibile se e solo se anche la matrice $C_1 = (A_1|(0\ 1\ 0)^T)$ ha rango 2. Poich le prime due colonne di A_1 sono linearmente indipendenti C_1 ha rango 2 se e solo se la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ha determinante nullo, ma il determinante di tale matrice è -2 per cui $rk\ C_1 = 3$ e dunque $(0\ 1\ 0)^T \notin Imf_1$.