

Esercizi di geometria analitica nel piano

Esercizio 1

Riconoscere la conica di equazione $x^2+4xy+4y^2-x=0$ e portarla in forma canonica.

Soluzione

Le matrici associate alla conica sono $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 4 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Essendo $\det A=0$ e $\det B=-1$ la

conica è una parabola. Gli autovalori di A sono 0 e 5. Quindi l'equazione della conica in forma canonica è $5X^2+2pY=0$ ove $p=\sqrt{\frac{1}{5}}$ per cui la conica in forma canonica diventa $5\sqrt{5}X^2+2Y=0$.

Esercizio 2

Riconoscere la conica: $x^2-2kxy+y^2-4x=0$ al variare di k e per $k=1$ portarla in forma canonica.

Soluzione

Le matrici associate alla conica sono $A=\begin{bmatrix} 1 & -k \\ -k & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & -k & -2 \\ -k & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Essendo $\det A=1-k^2$ e $\det B=-4$ la

conica non è degenere, ma il suo tipo cambia al cambiare di k , infatti se $k=\pm 1$ è una parabola, se $k < -1$ o $k > 1$ è un'iperbole, se $-1 < k < 1$ è un'ellisse. Per $k=1$ la conica diventa $x^2-2xy+y^2-4x=0$, è una parabola e la matrice A ha autovalori 0 e 2. La forma canonica dell'equazione della conica è allora $2X^2+2\sqrt{2}Y=0$.

Esercizio 3

Riconoscere al variare del parametro a la conica di equazione $ax^2+2(a-4)xy+2y^2-1=0$.

Per $a=-2$ scrivere la sua equazione canonica.

Soluzione

Le matrici associate alla conica sono $A=\begin{bmatrix} a & a-4 \\ a-4 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} a & a-4 & 0 \\ a-4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Essendo $\det A=2a-(a-4)^2$ e

$\det B=-(2a-(a-4)^2)=-a^2+10a-16$, la conica è degenere se $a^2-10a+16=0$ ovvero se $a=2$ o $a=8$ ed in tal caso essendo anche $\det A=0$ è spezzata in due rette parallele. Se $a < 2$ o $a > 10$ $\det A$ è negativo e l'equazione rappresenta un'iperbole, equilatera se $a = -2$, se $2 < a < 10$ è un'ellisse. Per $a=-2$ la conica diventa $-2x^2-12xy+2y^2-1=0$, è un'iperbole equilatera e il polinomio caratteristico della matrice A è $(-\lambda)(2-\lambda)-36=\lambda^2-40$, quindi gli autovalori di A sono $\pm 2\sqrt{10}$. La forma canonica è del tipo $2\sqrt{10}X^2 - 2\sqrt{10}Y^2 + c = 0$, e tenuto conto che I_3 è invariante per rototraslazione si ha $-40c=40$, quindi $c=-1$, da cui la forma canonica della conica è $\frac{X^2}{2\sqrt{10}} - \frac{Y^2}{2\sqrt{10}} = 1$.

Esercizio 4

Sia data la conica C di equazione $x^2+3xy-y^2+x+y-1=0$.

- a) Riconoscere C e scriverne la forma canonica.
 b) Determinarne eventuali centro, assi, vertici, asintoti.
 c) Scrivere l'equazione di una direttrice di C (ridotta in forma canonica)

Soluzione

a) Le matrici associate alla conica sono $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$. Essendo $\det A = -\frac{13}{4}$ e \det

$B=4$, la conica è un'iperbole non degenera ed è anche equilatera essendo $\text{tr}A=0$. Il polinomio caratteristico della matrice A è $(1-\lambda)(-1-\lambda) - \frac{9}{4} = \lambda^2 - \frac{13}{4}$, quindi gli autovalori di A sono $\pm \frac{\sqrt{13}}{2}$, il termine noto della conica in forma canonica è $-\frac{16}{13}$ per cui la forma canonica della conica è

$$\frac{x^2}{\frac{32}{13\sqrt{13}}} - \frac{y^2}{\frac{32}{13\sqrt{13}}} = 1.$$

b) Le coordinate del centro della conica sono le soluzioni del sistema lineare $A\vec{x} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, cioè

$C(-\frac{5}{13}, -\frac{1}{13})$. Gli assi hanno la direzione degli autovettori di A. L'autovettore relativo a λ_1 è $\begin{bmatrix} 3 \\ \sqrt{13}-2 \end{bmatrix}$, quello relativo a λ_2 è $\begin{bmatrix} 2-\sqrt{13} \\ 3 \end{bmatrix}$, quindi gli assi sono $3(x+\frac{5}{13})+(\sqrt{13}-2)(y+\frac{1}{13})=0$ e

$(2-\sqrt{13})(x+\frac{5}{13})+3(y+\frac{1}{13})=0$. Gli asintoti, essendo l'iperbole equilatera, sono le bisettrici degli assi, ovvero il luogo dei punti del piano equidistanti dai due assi, per cui le loro equazioni sono date da $3(x+\frac{5}{13})+(\sqrt{13}-2)(y+\frac{1}{13}) = \pm [(2-\sqrt{13})(x+\frac{5}{13})+3(y+\frac{1}{13})]$.

Altra soluzione: Il complesso dei termini quadratici dell'equazione di un'iperbole rappresentano due rette parallele agli asintoti, quindi essendo $x^2 + 3xy - y^2 = \frac{1}{4}[2x - (3+\sqrt{13})y][2x - (3-\sqrt{13})y]$,

abbiamo che le equazioni degli asintoti sono $2(x+\frac{5}{13}) - (3+\sqrt{13})(y+\frac{1}{13}) = 0$ e $2(x+\frac{5}{13}) -$

$(3-\sqrt{13})(y+\frac{1}{13}) = 0$. Gli assi sono poi in ogni iperbole le bisettrici degli asintoti e quindi si

calcolano subito senza passare dagli autovettori come luogo dei punti del piano equidistanti dai due asintoti.

c) I fuochi in forma canonica sono i punti di ascissa $\pm\sqrt{a^2+b^2}$ che nel nostro caso diventa $\pm\sqrt{2a^2} = \pm\frac{8}{\sqrt{13+\sqrt{13}}}$ e di ordinata nulla, la direttrice relativa ad esempio al fuoco $F_1(\frac{8}{\sqrt{13+\sqrt{13}}}, 0)$

ha equazione $x = \frac{a^2}{x_{F_1}} = \frac{4}{\sqrt{13+\sqrt{13}}}$.

Esercizio 5

Nel piano euclideo, sia fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale Oxy:

(1) Scrivere l'equazione dell'ellisse γ avente centro nel punto C (1; 2) e semiassi paralleli agli assi cartesiani, di lunghezze $a = 2\sqrt{2}$ e $b = 1$.

(2) Scrivere l'equazione dell'ellisse Γ ottenuta ruotando γ in maniera che il semiasse maggiore appartenga alla retta $r: x - y + 1 = 0$.

Soluzione

(1) L'equazione canonica di una ellisse avente semiassi di lunghezze $a = 2\sqrt{2}$ e $b = 1$ e centro in O è $\frac{x^2}{8} + y^2 = 1$. Effettuiamo la traslazione $\begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y - 2 \end{cases}$ che porta l'origine nel punto di coordinate $(1, 2)$

ed abbiamo l'equazione della conica richiesta: $\frac{(X-1)^2}{8} + (Y-2)^2 = 1$.

(2) Poiché il centro di γ appartiene alla retta r , dobbiamo solo effettuare una con centro in C che trasformi la base canonica nella base formata dal versore direzione della retta r e da uno ad esso ortogonale. Poiché il versore direzione della retta r è $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, la rotazione con centro in O ha

equazione $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e va composta con la traslazione che porta O in C , dunque

$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ da cui $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X-1 \\ Y-2 \end{bmatrix}$. Questa trasformazione applicata a

$\frac{x^2}{8} + y^2 = 1$ porta a $9X^2 - 14XY + 9Y^2 + 10X - 22Y + 1 = 0$ che è l'equazione di Γ .

Esercizio 6.

Si consideri la seguente matrice, dipendente dai parametri reali $h; k$

$$M(h, k) = \begin{bmatrix} k & k & 2h \\ k & 1 & h+1 \\ 3h & h+1 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) Stabilire per quali valori dei parametri esistono coniche aventi $M(h, k)$ come matrice associata, e verificare che esse formano un fascio F .

(2) Classificare le coniche di F .

(3) Stabilire quando il punto $P(1; 1)$ appartiene alla conica.

Soluzione

(1) Le matrici associate alle coniche sono matrici reali simmetriche e quindi affinché $M(h, k)$ sia una matrice associata ad una conica deve essere $h=0$. In tal caso le coniche hanno equazione $kx^2 + 2kxy + y^2 + 2y + 2 = 0$ e dipendendo da un parametro lineare formano un fascio F individuate dalle coniche $x^2 + 2xy = 0$ e $y^2 + 2y + 2 = 0$.

(2) Gli invarianti delle coniche di F sono $I_1 = k$, $I_2 = 1 - k^2$, $I_3 = -2k^2$ per cui si hanno coniche degeneri solo per $h=0$ e in tal caso essendo anche $I_1 = 0$ la conica è spezzata in due rette ortogonali. Le coniche sono parabole per $h = \pm 1$, iperboli per $-1 < k < 1$, ellissi per $h < -1$ o $h > 1$.

(3) Affinché $(1, 1)$ appartenga alla conica deve essere $3k + 5 = 0$ ovvero $k = -5/3$.

Esercizio 7.

Si consideri la conica Γ di equazione $x^2 - xy + 2x - y = 0$.

(1) Classificare Γ , trovarne una forma canonica e l'equazione del relativo cambio di riferimento.

- (2) Dopo aver verificato che tutte le rette parallele all'asse x tagliano Γ in punti reali, determinare la parallela che taglia su Γ la corda di lunghezza minima.
- (3) Trovare l'equazione del luogo descritto dai punti medi delle corde tagliate su Γ dalle rette parallele all'asse x .

Soluzione

(1) Le matrici associate alle coniche sono $A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ e i suoi invarianti

sono $I_1=1$, $I_2=-1/4$, $I_3=1/4$ per cui la conica è un'iperbole non equilatera. Il polinomio caratteristico di A è $\lambda^2 - \lambda - 1/4$ e quindi gli autovalori di A sono $\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$, la forma canonica è

$\frac{1+\sqrt{2}}{2}X^2 + \frac{1-\sqrt{2}}{2}Y^2 = 1$. Gli autovettori normalizzati forniscono la matrice ortogonale da M

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{bmatrix} \text{ e le coordinate del centro, soluzioni del sistema lineare } A\underline{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ sono}$$

$(-1; 0)$, per cui il cambio di riferimento che riduce Γ a forma canonica risulta essere $[x; y]^T = M[x'; y']^T + [-1; 0]^T$.

- (2) Intersecando Γ con la retta di equazione $y = k$, otteniamo l'equazione risolvente $x^2 + (2-k)x - k = 0$, il cui discriminante è $\Delta = 4 + k^2$. Quindi $\Delta > 0$ per ogni $k \in \mathbb{R}$, ed i punti di intersezione sono entrambi reali di coordinate $(\frac{(2-k) \pm \sqrt{\Delta}}{2}, k)$. La lunghezza della corda è uguale a $\sqrt{\Delta}$, quindi la corda di lunghezza minima si ottiene per $k = 0$, corrispondente all'asse x .
- (3) I punti medi delle corde hanno coordinate $x = \frac{2-k}{2}$, $y = k$ per cui il loro luogo è la retta $2x + y - 2 = 0$.

Esercizio 8

Nel piano euclideo sia dato il fascio di coniche di equazione $C_k : kx^2 + 2(2-k)xy + ky^2 - x - y - 2 = 0$.

- (1) Posto $k = 3$, classificare la conica C_3 e determinarne una sua equazione canonica. Calcolare quindi le coordinate del suo centro e gli assi, e calcolare il cambio di riferimento che la riporta in forma canonica.
- (2) Determinare i valori di k per cui C_k è una conica degenere e le coordinate dei punti base del fascio.
- (3) Calcolare poi i valori di k per cui C_k è un'iperbole equilatera, e quelli per cui essa è una circonferenza.

Soluzione

- (1) La conica C_3 ha equazione $3x^2 - 2xy + 3y^2 - x - y - 2 = 0$. I suoi invarianti sono $I_1=6$, $I_2=8$, $I_3=-18$, quindi C_3 è un'ellisse non degenere. Il polinomio caratteristico della matrice A associata al complesso dei termini di secondo grado è $(\lambda - 4)(\lambda - 2)$, gli autovalori sono quindi 2 e 4. L'equazione canonica di C_3 è quindi $2X^2 + 4Y^2 = 9/4$. Il centro di simmetria di C_3 si

ottiene risolvendo il sistema $\begin{cases} 6x - 2y = 1 \\ -2x + 6y = 1 \end{cases}$ la cui unica soluzione è $C(1/4, 1/4)$. L'autospazio

$V(2)$ è costituito da tutti e soli i vettori della forma $\begin{bmatrix} h \\ h \end{bmatrix}$, quindi la matrice della rotazione è

$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, di conseguenza il cambio di riferimento è $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$. Gli assi

della conica hanno direzione degli autovettori relativi a 2 e 4 e sono: $2x+2y=1$ e $x-y=0$.

- (2) Gli invarianti di C_k sono: $I_1=2k$, $I_2=k^2-(2-k)^2$, $I_3=(1-k)(4k-3)$, quindi C_k è degenera se $k=1$ o $k=3/4$. I punti base del fascio si ottengono risolvendo il sistema $\begin{cases} 4xy-x-y+1=0 \\ x^2+2xy+y^2-x-y=0 \end{cases}$. Le soluzioni del sistema sono i punti di coordinate $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1/2, -1/2)$, $(-1/2, 1/2)$.

- (3) C_k è un'iperbole equilatera se $I_1=0$ cioè per $k=0$ e per tale valore la conica non è degenera. Perché C_k sia una circonferenza basta che il termine in xy abbia coefficiente 0 (visto che x^2 e y^2 hanno coefficienti uguali) e quindi deve essere $k=2$.

Notate che abbiamo perso una conica degenera del fascio, infatti possiamo vedere le coniche di C_k scritte come $(4xy-x-y+1)+k(x^2+2xy+y^2-1)=0$ e la conica degenera $x^2+2xy+y^2-1=0$ (spezzata nelle due rette parallele $x+y+1=0$ e $x+y-1=0$, che definisce il fascio non si ottiene per alcun valore di k).

Esercizio 9

Sia C_k la conica di equazione $C_k: x^2 + (k-2)xy + y^2 - 4 = 0$ (k parametro reale)

- Al variare di $k \in \mathbb{R}$, riconoscere di quale tipo di conica si tratti.
- Trovare le coniche degeneri della famiglia.
- Mostrare che ci sono due rette che sono assi di simmetria di ogni conica della famiglia,

Soluzione

- Gli invarianti di C_k sono $I_1=2$, $I_2=1-\frac{(k-2)^2}{4}$, $I_3=-4+(k-2)^2$, quindi C_k è una parabola degenera (cioè una conica spezzata in rette parallele se $k=0$ o $k=4$, un'ellisse se $0 < k < 4$, un'iperbole (mai equilatera) se $k < 0$ o $k > 4$ è un'ellisse non degenera.
- Le coniche degeneri della famiglia sono $x^2-2xy+y^2=4$, che si spezza nelle due rette $x-y+2=0$ e $x-y-2=0$, e $x^2+2xy+y^2=4$, che si spezza nelle due rette $x+y+2=0$ e $x+y-2=0$. (Come osservato nell'esercizio precedente anche in questo caso si è persa la conica degenera $xy=0$).
- Tutte le coniche non degeneri della famiglia hanno centro in O (mancano i termini lineari). Gli autovalori di

$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{k-2}{2} \\ \frac{k-2}{2} & 1 \end{bmatrix}$ sono $k/2$ e $(4-k)/2$. Un autovettore relativo all'autovalore $k/2$ è $[1, 1]^T$, di

conseguenza un autovettore relativo all'autovalore $(4-k)/2$ è $[1, -1]^T$. Tutte le coniche hanno quindi assi di simmetria $x-y=0$ e $x+y=0$. Ed è immediato verificare che anche le due coniche spezzate sono simmetriche rispetto a tali rette.

Esercizio 10

Nel piano con riferimento cartesiano ortogonale Oxy siano date le rette r ed s rispettivamente di equazione $x + 3y - 1 = 0$, $3x + y - 3 = 0$.

- Descrivere la famiglia F delle iperboli aventi r ed s come asintoti.
- Determinare in F tutte le iperboli degeneri.
- Ridurre a forma canonica l'iperbole C di F passante per l'origine.

Soluzione

- (1) Sappiamo che il complesso dei termini di secondo grado dell'equazione di una iperbole è una conica spezzata in due rette che hanno la direzione degli asintoti, pertanto per avere r ed s come asintoti le coniche devono avere la forma $(x+3y)(3x+y)+ax+by+c=0$, inoltre affinché r, s siano gli asintoti le coniche devono anche avere centro nel punto $(1,0)$ intersezione delle due rette. Le coordinate del centro della generica conica $(x+3y)(3x+y)+ax+by+c=0$ sono le soluzioni del

$$\text{sistema } \begin{cases} 3x+5y=-\frac{a}{2} \\ 5x+3y=-\frac{b}{2} \end{cases}, \text{ quindi affinché il centro sia } (1,0) \text{ deve essere } a=-6 \text{ e } b=-10, \text{ le iperboli}$$

cercate sono dunque della forma $(x+3y)(3x+y)-6x-10y+c=0$.

- (2) L'unica conica degenera si ottiene per $c=3$ ed è spezzata nelle due rette r, s .
- (3) La conica che passa per O è $(x+3y)(3x+y)-6x-6y=0$. La matrice A associata alla conica ha autovalori 2 ed 8, quindi la conica sarà del tipo $2X^2+8Y^2+c'=0$. Il determinante della matrice B associata alla quadrica di partenza è 48, quello della matrice B' associata alla quadrica nella seconda forma è $-16c'$ da cui si ottiene $c'=-3$. La forma canonica è dunque $2X^2+8Y^2-3=0$.