

## Determinante di una matrice quadrata

**Definizione.** Sia  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$  una matrice quadrata di ordine  $n$  a coefficienti in un campo  $K$ .

Chiamiamo *determinante di  $A$*  e lo indichiamo con  $\det A$  o con  $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$  l'elemento di  $K$

che si ottiene da  $A$  tramite questa procedura:

1. Sia  $A = [a]$ , cioè  $n=1$ , allora  $\det A = a$ ,
2. Sia  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$  di ordine  $n > 1$ , siano:

$A_{ik}$  la matrice quadrata di ordine  $n-1$  che si ottiene da  $A$  cancellando la sua  $i$ -esima riga e la sua  $k$ -esima colonna,

$M_{ik} = \det A_{ik}$  (detto *minore complementare di  $a_{ik}$* ),

$C_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$  (detto *complemento algebrico di  $a_{ik}$* ),

allora  $\det A = \sum_{i=1}^n a_{1i} C_{1i} = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + \cdots + a_{1n} C_{1n}$ .

Quindi  $\det A$  è l'elemento di  $K$  che si ottiene facendo la somma dei prodotti degli elementi della prima riga di  $A$  per i rispettivi complementi algebrici.

**Caso  $n=2$ .** Vediamo di utilizzare la definizione per calcolare  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ .

Si ha  $C_{11} = a_{22}$ ,  $C_{12} = (-1)^{1+2} a_{21} = -a_{21}$  e dunque  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$ .

Il determinante di una matrice di ordine 2 si ottiene quindi sommando il prodotto degli elementi della diagonale principale e l'opposto del prodotto degli elementi della diagonale secondaria.

**Caso  $n=3$ .** Utilizziamola anche per calcolare  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ .

Si ha  $C_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}$ ,  $C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31})$ ,

$C_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}$ . Dunque

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}.$$

Il determinante di una matrice di ordine 3 si può quindi calcolare facendo uso della regola di Sarrus che probabilmente avete visto nelle scuole superiori.

Si considera la tabella  $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$  ottenuta copiando alla destra delle colonne di

A le sue prime colonne e si fa la somma dei prodotti degli elementi sulle diagonali segnate da una linea intera meno i prodotti degli elementi che si trovano sulle diagonali segnate da una linea tratteggiato.

**N.B.** Una regola analoga NON vale per il determinante di matrici di ordine maggiore di 3.

La definizione che abbiamo usato è una definizione operativa e non è l'usuale definizione astratta di determinante. Inoltre privilegia la prima riga rispetto alle altre righe del determinante, mentre dagli esempi precedenti tale situazione "privilegiata" della prima riga non emerge. Si può dimostrare infatti il

**I° Teorema di Laplace.** Il determinante di una matrice quadrata si ottiene facendo la somma dei prodotti degli elementi di una sua riga (o colonna) per i rispettivi complementi algebrici.

Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$ , come conseguenza di quanto sopra si ottiene subito che:

1.  $\det A = \det A^T$ .
2. Il determinante di una matrice (quadrata) che ha una riga (colonna) tutta composta di 0 è 0.
3. Se  $A$  è una matrice triangolare (alta o bassa), allora  $\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}$ , e quindi il determinante della matrice identica di un qualsiasi ordine è 1 ed il determinante di una matrice nulla quadrata di un qualsiasi ordine è 0.
4. Sia  $A'$  una matrice ottenuta dalla matrice  $A$  scambiando due righe (o due colonne) allora  $\det A' = -\det A$ .

Infatti supponiamo di aver ottenuto  $A'$  scambiando la riga  $i$ -esima di  $A$  con la sua riga  $i+1$ -esima e sviluppiamo  $\det A'$  a partire dalla riga  $i$ -esima. Abbiamo che l'elemento di posto  $(i,k)$  di  $A'$  è uguale all'elemento di posto  $(i+1,k)$  di  $A$ , che il minore complementare dell'elemento di posto  $(i,k)$  di  $A'$  coincide col minore complementare dell'elemento di posto  $(i+1,k)$  di  $A$ , e quindi il complemento algebrico dell'elemento di posto  $(i,k)$  di  $A'$  è l'opposto del complemento algebrico dell'elemento di posto  $(i+1,k)$  di  $A$ , quindi si ha subito il risultato. Sia ora  $A'$  la matrice ottenuta da  $A$  scambiando due righe non contigue e supponiamo, senza perdita di generalità, che tali righe siano la riga  $i$ -esima e la riga  $j$ -esima con  $j > i+1$ . Tale scambio si può ottenere con successivi scambi di righe contigue. E' abbastanza facile convincersi che servono  $2(j-i)-1$  scambi di righe contigue per scambiare la riga  $i$ -esima con la  $j$ -esima, ad ognuno di questi scambi corrisponde un cambiamento di segno nel calcolo del determinante della matrice ottenuta ed essendo  $2(j-i)-1$  un numero dispari si ha il risultato.

5. Se una matrice  $A$  ha due righe (colonne) uguali allora  $\det A = 0$ .

Infatti la matrice  $A'$  ottenuta da  $A$  scambiando le due righe uguali coincide con  $A$  e dunque  $\det A' = \det A$ , ma per la 4.  $\det A' = -\det A$  da cui  $\det A = -\det A$  e poiché 0 è l'unico elemento di  $K$  uguale al suo opposto si ottiene  $\det A = 0$ .

6. **II° Teorema di Laplace.** Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine  $n$ . La somma dei prodotti di una sua riga (colonna) per i complementi algebrici di un'altra riga (colonna) è 0. In simboli  $\sum_{i=1}^n a_{ki} C_{hi} = 0$  ( $\sum_{i=1}^n a_{ik} C_{jh} = 0$ ) se  $k \neq h$ .

Infatti  $\sum_{i=1}^n a_{ki} C_{hi}$  può essere visto come lo sviluppo del determinante (secondo la riga  $h$ -esima) di una matrice  $A'$  che ha tutte le righe ad eccezione della riga  $h$ -esima uguali alle corrispondenti righe di  $A$  e la riga  $h$ -esima uguale alla  $k$ -esima riga di  $A$ . Poiché la matrice  $A'$  ha due righe uguali per la 5. il suo determinante è 0.

7. Sia  $A'$  una matrice ottenuta dalla matrice  $A$  moltiplicando tutti gli elementi di una sua riga (o colonna) per un elemento  $c$  del campo  $K$  allora  $\det A' = c \det A$ .

8.  $\det cA = c^n \det A$ .

Da qui si ricava che una matrice emisimmetrica di ordine dispari ha determinante nullo. Infatti se  $A$  è emisimmetrica  $A = -A^T$  e dunque  $\det A = \det (-A^T) = (-1)^n \det A^T = -\det A$  perché  $n$  è dispari. Quindi, visto che l'unico elemento di  $K$  uguale al suo opposto è lo 0, si ottiene  $\det A = 0$ .

9. Se la  $i$ -esima riga (colonna) di  $A$  è somma di due vettori riga (colonna)  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}$ , allora il determinante di  $A$  è la somma dei determinanti delle due matrici che si ottengono da  $A$  sostituendo la sua  $i$ -esima riga (colonna) con  $\underline{b}$  e con  $\underline{c}$  rispettivamente.

10. Il determinante di una matrice (quadrata) non cambia se a una sua riga (colonna) si aggiunge una combinazione lineare delle restanti righe (colonne).

Basta applicare 9., 7. e 5.

11. Il determinante di  $A$  è uguale od opposto al determinante di una qualsiasi matrice a scalino  $U$  da essa ottenuta.

E' una conseguenza immediata di 4. e 10. Precisamente i determinati di  $U$  e di  $A$  sono uguali se nell'ottenere  $U$  è stato fatto un numero pari di scambio di righe e sono opposti se è stato fatto un numero dispari di scambi di righe.

12. La matrice  $A$  ha determinante uguale a 0 se e solo se una sua riga (colonna) è combinazione lineare delle restanti righe (colonne).

Se una riga di  $A$  è combinazione lineare delle restanti, possiamo aggiungere a quella riga la combinazione lineare delle restanti a coefficienti opposti e troviamo una matrice con una riga di 0, per la 2. quindi il suo determinante è 0 e per la 9 è uguale al determinante di  $A$ . Viceversa se il determinante di  $A$  è 0 ogni matrice a scalino da essa ottenuta ha una riga di 0 e quindi la riga di  $A$  corrispondente a tale riga è combinazione lineare delle altre.

Una ulteriore importante proprietà del determinante è data dal seguente

**Teorema di Binet.** Siano  $A$  e  $B$  due matrici quadrate di ordine  $n$ . Allora  $\det (AB) = (\det A)(\det B)$ .

Da quanto segue

**Corollario** Una matrice quadrata  $A$  ammette matrice inversa se e solo se  $\det A \neq 0$ .

Infatti se  $A$  ha inversa abbiamo  $(\det A)(\det A^{-1}) = \det (AA^{-1}) = \det I_n = 1$  e quindi  $\det A \neq 0$ . Se invece  $\det A \neq 0$  allora  $\det A^{-1} \neq 0$  e quindi  $A$  ha rango massimo e pertanto ammette inversa.

Ovviamente se  $A$  ammette inversa  $\det A^{-1} = 1 / \det A$ .

**Altro modo per costruire l'inversa di una matrice.** Come conseguenza dei due teoremi di Laplace otteniamo anche che se la matrice  $A$  ammette inversa allora ha la seguente forma

$$A^{-1} = (1/\det A)[\alpha_{ik}] \quad \text{con } \alpha_{ik} = C_{ki}$$

dove  $C_{ki}$  indica il complemento algebrico dell'elemento di posto  $(k, i)$  di  $A$ .

Poniamo infatti  $B = [\alpha_{ik}]$  e  $D = AB$ , il generico elemento  $d_{rs}$  di  $D$  si ottiene come somma dei prodotti degli elementi della  $r$ -esima riga di  $A$  per quelli della  $s$ -esima colonna di  $B$ , dunque

$$d_{rs} = \sum_{i=1}^n a_{ri} b_{is} = \sum_{i=1}^n a_{ri} C_{si}.$$

Quindi se  $r=s$  si ha per il I° teorema di Laplace  $d_{rs} = \det A$  e se  $r \neq s$  si ha per il II° teorema di Laplace  $d_{rs} = 0$ . Perciò  $D = \text{diag}(\det A, \dots, \det A)$  e dunque  $AA^{-1} = A((1/\det A) B) = (1/\det A) AB = I_n$ .

Da questa costruzione della matrice inversa si ottiene la

**Regola di Cramer.** Un sistema lineare di  $n$  equazioni in  $n$  incognite la cui matrice dei coefficienti  $A$  ha rango massimo ha una e una sola soluzione. Detta  $x_i$  la  $i$ -esima componente di tale soluzione si ha  $x_i = (\det A_i) / (\det A)$ , dove  $A_i$  è la matrice che si ottiene da  $A$  sostituendo la sua  $i$ -esima colonna con la colonna dei termini noti.

La prima parte di questa regola vi era già nota ed era stata provata facendo uso dell'eliminazione gaussiana. Proviamola direttamente. Se  $A$  ha rango massimo questo equivale a dire che  $A$  ammette inversa  $A^{-1}$  e che  $\det A \neq 0$ . Sia  $A\underline{x} = \underline{b}$  la scrittura matriciale del sistema, si verifica subito che  $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$  è una soluzione dell'equazione matriciale e quindi del sistema, infatti sostituendo  $A^{-1}\underline{b}$  ad  $\underline{x}$  si ottiene  $A(A^{-1}\underline{b}) = (AA^{-1})\underline{b} = I_n\underline{b} = \underline{b}$ . Inoltre  $A^{-1}\underline{b}$  è l'unica soluzione dell'equazione matriciale e quindi del sistema, infatti se ci fosse un'altra soluzione  $\underline{c}$ , da  $A\underline{c} = \underline{b}$  si otterrebbe, moltiplicando a sinistra per  $A^{-1}$ ,  $A^{-1}\underline{b} = A^{-1}(A\underline{c}) = (AA^{-1})\underline{c} = I_n\underline{c} = \underline{c}$ . Ora la  $i$ -esima componente del vettore colonna  $A^{-1}\underline{b}$  è  $(1/\det A) \sum_{h=1}^n \alpha_{ih} b_h = (1/\det A) \sum_{h=1}^n C_{hi} b_h$  e  $\sum_{h=1}^n C_{hi} b_h$  è lo sviluppo del determinante della matrice  $A_i$  secondo gli elementi della sua  $i$ -esima colonna.