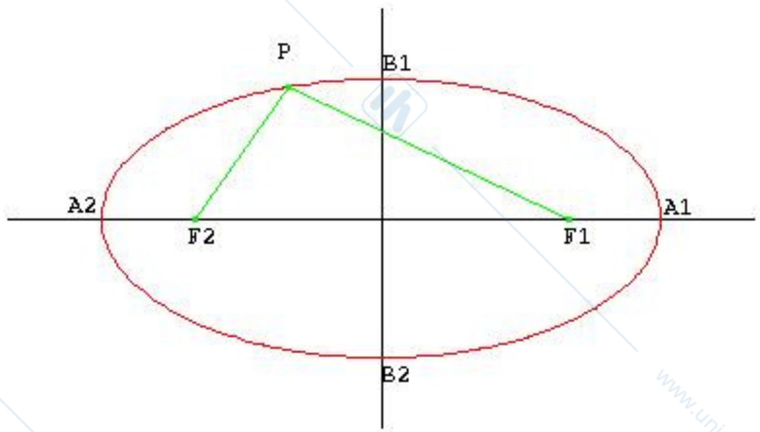
Coniche nel piano

Ricordiamo dalle superiori.....circonferenze

- Una *circonferenza* è il luogo dei punti del piano la cui distanza da un punto fisso detto *centro* è una costante detta *raggio*
  - E' immediato che se chiamiamo r il raggio e fissiamo l'origine degli assi in O una circonferenza ha equazione $x^2+y^2=r^2$.
  - Se fissiamo il sistema di riferimento in modo generico ed (α,β) sono le coordinate del centro, l'equazione risulta $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$, ovvero $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2=0$.
- In generale chiamiamo circonferenza il luogo dei punti del piano che soddisfano un'equazione del tipo $x^2+y^2+ax+by+c=0$, ovvero un'equazione di secondo grado in x,y, priva di termini misti e con coefficienti di x^2, y^2 uguali (e quindi assunti =1).
  - L'equazione rappresenta una circonferenza con centro di coordinate $(-a/2,-b/2)$ e raggio $r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ se $a^2 + b^2 - 4c \geq 0$ (ridotta al solo centro se r=0), una circonferenza immaginaria se $a^2 + b^2 - 4c < 0$

Ricordiamo dalle superiori…..ellissi

- Una *ellisse* è il luogo dei punti del piano tali che la somma delle loro distanze da due punti fissi detti *fuochi* sia costante.



  - Fissando il sistema di riferimento in modo che la retta che congiunge i due punti fissi F_1 ed F_2 sia l'asse x, e l'asse del segmento F_1F_2 sia l'asse y, dette ± c le due ascisse dei fuochi e 2a la costante, si ha che un punto P di coordinate (x,y) appartiene all'ellisse se e solo se $PF_1+PF_2=2a$ ovvero se e solo se $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$ da cui, ponendo $b^2=a^2-c^2$, si ottiene l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

detta *equazione canonica* della ellisse.

....ellissi

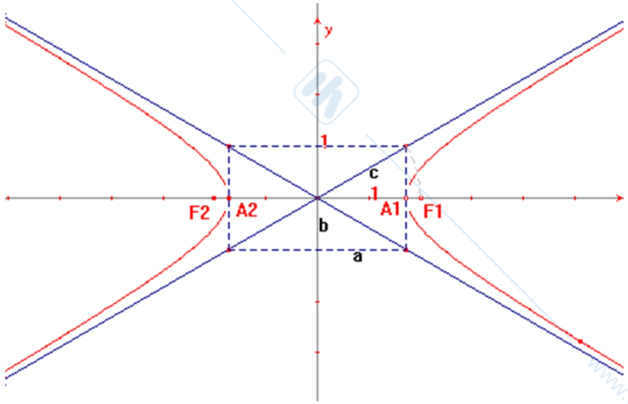
- Dall'esame dell'equazione si vede che l'ellisse ha *due assi di simmetria ortogonale* che sono rispettivamente la retta che congiunge i fuochi (asse focale) e l'asse del segmento che ha come estremi i fuochi, inoltre l'ellisse è simmetrica rispetto al punto di intersezione fra i due assi detto *centro di simmetria* (o semplicemente *centro*).
- I due assi di simmetria incontrano la ellisse in quattro punti detti *vertici*. I vertici che appartengono all'asse focale sono gli estremi di un segmento di lunghezza 2a, gli altri due vertici sono gli estremi di un segmento di lunghezza 2b con $a>b$, per cui a e b sono detti rispettivamente (lunghezza del) semiasse maggiore e (lunghezza del) semiasse minore dell'ellisse.

➢ La circonferenza è una particolare ellisse i cui fuochi coincidono fra loro e col centro

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Ricordiamo dalle superiori…..iperboli

- Una *iperbole* è il luogo dei punti del piano tali che il valore assoluto della differenza delle loro distanze da due punti fissi detti *fuochi* sia costante.



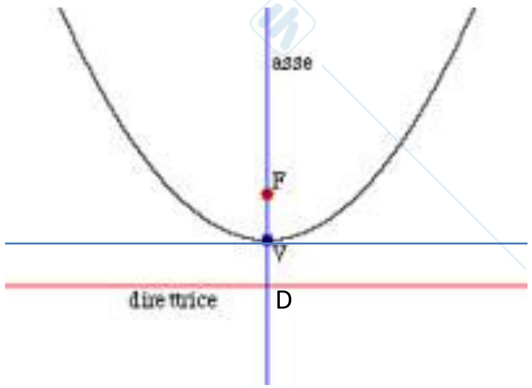
  – Fissando il sistema di riferimento come nel caso precedente, dette ancora $\pm$ c le due ascisse dei fuochi e 2a la costante, si ha che un punto P di coordinate (x,y) appartiene all'iperbole se e solo se $|PF_1 - PF_2| = 2a$ ovvero se e solo se $\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a$ da cui si ottiene, ponendo $-b^2 = a^2 - c^2$, l'equazione
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
detta *equazione canonica* della iperbole.

…iperboli

- Dall’esame dell’equazione si vede che anche l’iperbole ha il punto medio del segmento che ha come estremi i fuochi come *centro di simmetria*, l’asse focale e l’asse del segmento che congiunge i fuochi come *assi di simmetria ortogonale*.
- L’asse focale incontra la curva in due punti detti *vertici*, che sono estremi di un segmento di lunghezza 2a, l’altro asse non ha intersezioni reali con l’iperbole. L’asse focale è perciò detto *asse trasverso* e l’altro asse, *asse non trasverso*. Inoltre a è detto (lunghezza del) semiasse trasverso e b (lunghezza del) semiasse non trasverso.
- Le due rette $y=\pm(b/a)x$ si chiamano asintoti dell’iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Se sono ortogonali, ovvero se a=b, l’iperbole si dice *equilatera* ed ha equazione canonica $x^2-y^2=a^2$. Se si cambia il sistema di riferimento, prendendo come assi coordinati gli asintoti, l’equazione dell’iperbole equilatera diventa $xy=k$, ove $k=a^2/2$.

Ricordiamo dalle superiori…..parabole

- Una *parabola* è il luogo dei punti del piano che hanno uguale distanza da un punto fisso detto *fuoco* e da una retta fissa detta *direttrice*.



- Prendiamo come asse y la retta per il fuoco F perpendicolare alla direttrice d, come origine il punto medio del segmento che ha per estremi il fuoco e l'intersezione D fra d e l'asse y e di conseguenza la perpendicolare all'asse y per D sia l'asse x. Sia p la lunghezza del segmento PD, il fuoco ha coordinate (0, p/2) e la direttrice ha equazione y=-p/2. Un punto P appartiene alla parabola se e solo se dist (P,d)=PF, ovvero $\left|y+\frac{p}{2}\right|=\sqrt{\left(y-\frac{p}{2}\right)^2+x^2}$ da cui si ottiene l' *equazione canonica della parabola*

$$x^2=2py.$$

…parabole

- Dall'equazione si vede che la parabola ha un solo *asse di simmetria ortogonale* che è la retta per il fuoco perpendicolare alla direttrice. Tale asse interseca la parabola in un punto detto *vertice*, la tangente nel vertice alla parabola è perpendicolare all'asse e quindi parallela alla direttrice.
- La parabola non ha centri di simmetria, per questo col nome di *coniche a centro* si indicano ellissi e iperboli.

Eccentricità di una conica

- Ellissi, iperboli e parabole possono essere definite in modo unitario come il luogo dei punti del piano tali che il rapporto delle loro distanze da un punto fisso detto fuoco e da una retta fissa detta direttrice sia una costante $e \geq 0$. Tale costante e è detta *eccentricità* della conica
  - La parabola è per definizione la conica che si ottiene per $e=1$.
  - Consideriamo allora il caso $e \neq 1$. Si verifica, facendo i conti, che si trova una conica a centro e precisamente se $e>1$ una iperbole, se $0<e<1$ un'ellisse. Viceversa si verifica che per tutti i punti di una conica a centro in forma canonica il rapporto fra la loro distanza dal fuoco $F=(c,0)$ e dalla retta $x=a^2/c$ è costante e vale c/a, quindi $e<1$ per le ellissi ed $e>1$ per le iperboli. Nel caso particolare di una circonferenza si ha $c=0$ (perché i fuochi coincidono) e quindi $e=0$. La retta $x=a^2/c$ si chiama *direttrice associata al fuoco* F. (Si troverebbe ovviamente lo stesso risultato partendo dal fuoco $F'=(-c,0)$ pur di considerare come direttrice la retta $x=-a^2/c$.)
  - Osserviamo che l'eccentricità di una iperbole equilatera è $\sqrt{2}$.

Coniche e quadriche

- Il luogo dei punti del piano le cui coordinate soddisfano un'equazione di secondo grado in x,y a coefficienti reali si dice *conica.*
- Il luogo dei punti dello spazio le cui coordinate soddisfano un'equazione di secondo grado in x,y,z a coefficienti reali si dice *quadrica.*

➢ Una equazione di secondo grado nelle sole variabili x,y nello spazio non rappresenta una conica, ma una quadrica: i punti dello spazio hanno tre coordinate ed una equazione nelle sole variabili x,y può essere vista come un'equazione in x,y,z in cui i monomi xz,yz, z hanno coefficiente 0.

➢ Per rappresentare una conica (che è una linea) nello spazio abbiamo bisogno di due equazioni

Osservazioni

- Se avessimo calcolato le equazioni di ellissi, iperboli, parabole, senza fissare in forma opportuna il sistema di riferimento cartesiano avremmo ottenuto ancora delle equazioni di secondo grado nelle variabili x ed y a coefficienti reali, quindi ellissi, iperboli, parabole sono coniche.
- Se consideriamo due rette (reali) del piano xy e facciamo il prodotto delle loro equazioni troviamo ancora una equazione di secondo grado nelle variabili x ed y a coefficienti reali, quindi coppie di rette reali sono una conica.
- Se consideriamo due equazioni lineari in x e y i cui coefficienti sono numeri complessi coniugati il loro prodotto è una equazione di secondo grado nelle variabili x ed y a coefficienti reali quindi coppie di rette immaginarie coniugate sono coniche
- Le coniche spezzate in due rette sono dette *coniche degeneri*.

Problemi

1. Ogni conica è una ellisse o una iperbole, o una parabola o una conica degenere spezzata in due rette reali o immaginarie coniugate?
2. Data una equazione di secondo grado nelle variabili x,y come facciamo a riconoscere di che conica si tratta?

- Per classificare le coniche dobbiamo studiare le forme a cui con rototraslazione possiamo portare le loro equazioni
- Ogni rototraslazione del piano è rappresentata dalla isometria $\underline{x}=U\underline{X}+\underline{v}$ con U matrice ortogonale di ordine 2 con det U=1
- Siamo quindi interessati alle trasformazione dei polinomi di secondo grado in 2 variabili, ma poiché abbiamo considerato esaminato le trasformazioni di un polinomio di secondo grado in n variabili, continuiamo a considerare il caso generale con n generico che tornerà utile anche per le quadriche.

Forme canoniche

Ricordiamo che un polinomio di secondo grado in n incognite può essere rappresentato in una delle forme $\underline{x}^T A \underline{x} + 2\underline{b}^T \underline{x} + c$, $\underline{z}^T B \underline{z}$ ove A è una matrice reale simmetrica di ordine n e B è la matrice $\begin{bmatrix} A & \underline{b} \\ \underline{b}^T & c \end{bmatrix}$.

- Ogni polinomio di secondo grado è portato tramite una opportuna isometria $\underline{x} = U\underline{X} + \underline{v}$ (dove si può assumere det U=1) ad una delle forme
  - $\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \ldots + \lambda_r X_r^2$, se rk A=rkB=r,
  - $\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \ldots + \lambda_r X_r^2 + c'$, se rk A=r, rkB=r+1,
  - $\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \ldots + \lambda_r X_r^2 + 2pX_{r+1}$ se rk A=r, rkB=r+2,

  dove $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sono gli autovalori non nulli di A. Queste forme sono dette *forme canoniche del polinomio*.

Forme canoniche (2)

- Sia rk $A=r\leq n$, allora rk $[A|\underline{b}]\leq r+1$ e rk $B \leq\min$ (rk $[A|\underline{b}]+1,r+2)$.
- Se rk $[A|\underline{b}]=r$ e quindi rk $B \leq r+1$, il sistema $A\underline{x}=-\underline{b}$ ha una soluzione v. Sia U la matrice ortogonale che diagonalizza A, scelta in modo che det U=1. La isometria $\underline{x}=U\underline{X}+\underline{v}$ porta allora il polinomio nella forma $f'(\underline{X})=\underline{X}^TA'\underline{X}+2\underline{b}'^T\underline{X}+c'$ dove A' è una matrice diagonale simile ad A e $\underline{b}'=\underline{0}$. Ora c'=0 se e solo se B' ha r autovalori non nulli ovvero se e solo se rk A'= rk B'. Ma rk A=rk A' e rk B=rk B'.
- Se rk $[A|\underline{b}]=r+1$, $\underline{b}\notin$Col A=Row A e ker A=(Col A)$^\perp$, pertanto $\underline{b}=\underline{b}_0+\underline{b}_1$, con $\underline{b}_0\in$Col A e $\underline{b}_1\in$ker A. $\underline{b}_1$ è quindi un autovettore di A relativo all'autovalore 0. Sia U una matrice ortogonale che diagonalizza A con det U=1 e tale che la sua r+1-esima colonna sia un versore di $L(\underline{b}_1)$. Sia inoltre $\underline{w}$ una soluzione del sistema lineare $A\underline{x}=-\underline{b}_0$. La isometria $\underline{x}=U\underline{Y}+\underline{w}$ porta allora il polinomio nella forma $f'(\underline{Y})=\underline{Y}^TA'\underline{Y}+2\underline{b}'^T\underline{Y}+c'$ dove A' è una matrice diagonale simile ad A e $\underline{b}'$ è $U^T\underline{b}_1$ (che ha come unica componente non nulla quella relativa alla colonna di U che contiene il versore di $\underline{b}_1$). Applichiamo poi una ulteriore traslazione $\underline{Y}=\underline{X}+\underline{z}$, tale traslazione non modifica i termini quadratici, ma si può scegliere $\underline{z}$ in modo da annullare il termine noto, quindi la isometria $\underline{x}=U\underline{X}+(U\underline{z}+\underline{w})$ porta il polinomio nella forma $\lambda_1X_1^2+\lambda_2X_2^2+\ldots+\lambda_rX_r^2+2pX_{r+1}$ dove rk B'=rk B=r+2.

Invarianti di una conica

Sia C una conica di equazione $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ (ovvero $\underline{x}^T A\underline{x}+2b^T\underline{x}+c=0$, $\underline{z}^T B\underline{z}=0$)

- I valori

  $I_1=\text{tr } A=a_{11}+a_{22}=\lambda_1+\lambda_2$, $I_2=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2$, $I_3=\det B=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$

  (dove λ_1 e λ_2 sono gli autovalori di A), non sono modificati da rototraslazioni e vengono chiamati i*nvarianti ortogonali* della (equazione della) conica.
- Se si moltiplica per $k\neq 0$, l'equazione della conica (ottenendo quindi ancora una equazione della conica), I_1 (*invariante lineare*) viene a sua volta moltiplicato per k, I_2 (*invariante quadratico*) viene moltiplicato per k^2, I_3 (*invariante cubico*) viene moltiplicato per k^3.
- Moltiplicando per uno scalare non nullo l'equazione di una conica non vengono modificati la nullità degli invarianti e il segno dell'invariante quadratico.

Classificazione delle coniche

Sia C una conica di equazione $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$ con la notazione precedente

- Sia rk B=rk A=r
  - Se r=1 ($I_2=I_3=0$), l'equazione precedente con una opportuna rototraslazione (ed eventuale semplificazione) diventa $X^2=0$ e quindi rappresenta una conica spezzata in due rette reali coincidenti
  - Se r=2 ($I_2\neq0$, $I_3=0$) l'equazione di C diventa $\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2=0$, ovvero C è formata da due rette distinte reali se $I_2<0$, immaginarie se $I_2>0$
- Sia rk B=rk A+1
  - Se rk A=1, rkB=2 ($I_2=I_3=0$) l'equazione di C diventa $\lambda_1X^2+c'=0$ con $c'\neq0$, ovvero C è formata da due rette parallele eventualmente immaginarie coniugate
  - Se rk A=2, rk B=3 ($I_2\neq0$, $I_3\neq0$) l'equazione di C diventa $\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+c'=0$ con $c'=I_3/I_2\neq0$,
    - se $I_2 <$ C è un'iperbole ed è equilatera se $I_{1=0}$
    - se $I_2 >$ C è un'ellisse reale se se $I_1 I_3<$ C , immaginaria se $I_1 I_3>$
- Sia rk B=rk A+2
  - rk A=1, rkB=3 ($I_2=0$, $I_3\neq 0$) l'equazione di C diventa $\lambda_1X^2+2pY=0$ con $p\neq0$, quindi C è una parabola.

Riassumendo

In conclusione una conica può essere:

- un'ellisse (eventualmente una circonferenza, se gli autovalori di A sono coincidenti)
- una parabola
- un'iperbole
- spezzata in due rette che possono essere reali non parallele, reali parallele, immaginarie coniugate (cioè le rette sono rappresentate da equazioni lineari a coefficienti complessi e i coefficienti di una retta sono i coniugati dei corrispondenti coefficienti dell'altra).

Per riconoscere la conica si usa il seguente schema:

$$I_3\begin{cases} =0 \Rightarrow \text{coniche degeneri} \Rightarrow I_2 \begin{cases} <0 \text{ due rette reali non parallele} \\ =0 \text{ due rette parallele (ev. complesse coniugate)} \\ >0 \text{ due rette imm.coniugate non parallele} \end{cases} \\ \neq 0 \Rightarrow \text{coniche non degeneri} \Rightarrow I_2 \begin{cases} <0 \text{ iperbole (equilatera se } I_1=0) \\ =0 \text{ parabola} \\ >0 \text{ ellisse (immaginaria se } I_1 I_3>0) \end{cases} \end{cases}$$

Significato geometrico della riduzione a forma canonica

- La rototraslazione eseguita per portare l’equazione generale di una conica a forma canonica, e così riconoscerla, sostanzialmente porta nel caso delle coniche a centro l’origine del riferimento nel centro e gli assi cartesiani sugli assi di simmetria, nel caso della parabola l’origine sul vertice e l’asse y sull’asse di simmetria.
- Per le coniche a centro
  - le coordinate del centro sono le soluzioni del sistema lineare $A\underline{x}=-\underline{b}$,
  - gli assi hanno la direzione degli autovettori associati agli autovalori λ_1 e λ_2 di A,
  - gli asintoti dell’iperbole hanno le direzioni delle due rette in cui si spezza il complesso di termini quadratici uguagliato a 0
  - i semiassi dell’ellisse sono $\sqrt{\frac{I_3}{I_2\lambda_i}}$, i=1,2 ,
  - i semiassi dell’iperbole sono $\sqrt{\frac{I_3}{I_2\lambda_1}}$, (trasverso) e $\sqrt{-\frac{I_3}{I_2\lambda_2}}$ (non trasverso) , dove λ_2 è l’autovalore discorde a $I_3 I_2$,
  - potendo valutare a,b, possiamo allora ottenere anche c ed e.

Significato geometrico della riduzione a forma canonica (2)

- Per la parabola
  - l’asse di simmetria ha la direzione dell’autovettore di A associato all’autovalore 0. Per determinare l’asse dobbiamo trovare il vertice, ricordando che la tangente nel vertice è perpendicolare all’asse e quindi parallela alla direttrice.
  - $p=\pm\sqrt{-\frac{I_3}{\lambda_1}}$