

Durata: 1h30'

--	--	--	--

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE
Politecnico di Milano – Ingegneria informatica e comunicazioni – 5 novembre 2018

Cognome:	Nome:	Matricola:
-----------------	--------------	-------------------

Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. I compiti privi di indicazione leggibile di nome e cognome non verranno corretti. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

1. Nello spazio \mathbb{R}^3 si considerino i piani

$$\begin{aligned}\pi_1 &: x + y - z = -1, \\ \pi_2 &: x + hy - hz = -3h, \\ \pi_3 &: hy + z = 1 - h,\end{aligned}$$

dove h è un parametro reale.

- (a) Stabilire, al variare di h , la posizione reciproca dei tre piani.
- (b) Per $h = 2$ trovare il punto P intersezione dei tre piani.
- (c) Verificare che per $h = -1$ i tre piani appartengono al medesimo fascio proprio, trovare la retta sostegno del fascio e la sua parallela passante per il punto P .

Soluzione

- (a) Consideriamo il sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite formato dalle equazioni dei tre piani. La matrice dei coefficienti ha determinante $h^2 - 1$, pertanto per $h \neq -1, 1$ il sistema ammette una e una sola soluzione, i tre piani appartengono ad una stella il cui centro è il punto che ha per coordinate la soluzione del sistema. Per $h = 1$ i piani π_1 e π_2 sono paralleli e distinti e il terzo piano li interseca secondo due rette parallele e distinte (infatti la matrice dei coefficienti ha rango 2, quella completa ha rango 3 ed il sistema è impossibile). Per $h = -1$ la matrice dei coefficienti e la matrice completa hanno entrambe rango 2 il sistema ammette ∞^1 soluzioni e i tre piani appartengono ad uno stesso fascio (si verifica facilmente che l'equazione di π_1 è una combinazione lineare delle equazioni di π_2 e π_3 con coefficienti della combinazione 1 e -2).
- (b) Per $h = 2$ la soluzione del sistema è $x = 4$, $y = -2$, $z = 3$.
- (c) Abbiamo già verificato al punto 1, che per $h = -1$ i tre piani appartengono ad un fascio la cui retta è l'intersezione dei piani π_2 , π_3 ed ha quindi parametri direttori $0, 1, 1$. La retta cercata ha dunque equazioni parametriche $x = 4$, $y = -2 + t$, $z = 3 + t$ e quindi equazioni cartesiane $x = 4$, $y - z + 5 = 0$.

2. Nello spazio \mathbb{R}^4 si considerino i vettori $u_1 = [1, 1, 1, 1]^T$, $u_2 = [0, 1, 1, 0]^T$ ed $u_3 = [2, -1, -1, 2]^T$.

- Determinare una base e la dimensione del sottospazio U di \mathbb{R}^4 tale che $U = \mathcal{L}(u_1, u_2, u_3)$.
- Determinare una base e la dimensione del sottospazio V di \mathbb{R}^4 tale che $U \oplus V = \mathbb{R}^4$. Scrivere le equazioni di V .
- Determinare una base e la dimensione di un sottospazio W di \mathbb{R}^4 tale che $U + W = \mathbb{R}^4$ ed $U \cap W = \mathcal{L}(u_3)$. Scrivere le equazioni di W .

Soluzione

- Si verifica facilmente che $u_3 = 2u_1 - 3u_2$ pertanto i vettori u_1, u_2 sono una base di U che ha dimensione 2.
- Per verificare le condizioni date, lo spazio V deve avere dimensione 2 in quanto $\dim(U + V) = 4$ e $\dim(U \cap V) = 0$. Una base di V si può trovare facilmente come insieme di vettori che completano la base di U ad una base di \mathbb{R}^4 . Si verifica con conti immediati che $\{u_1, u_2, e_1, e_2\}$ sono una base di \mathbb{R}^4 . Pertanto lo spazio $V = \mathcal{L}(e_1, e_2)$ soddisfa le condizioni richieste, le sue equazioni cartesiane sono allora $z = 0, v = 0$.
- Per verificare le condizioni date, $\dim(W) = 3$. Prendiamo $W = \mathcal{L}(u_3, e_1, e_2)$. W ha dimensione 3, poiché $u_3 \in U$ e $u_3 \in W$, $\mathcal{L}(u_3)$ è un sottospazio di $U \cap W$, ma $\dim(U) = 2$, $\dim(W) = 3$ e $\dim(U + W) = 4$, dunque $\dim(U \cap W) = 1$ e $U \cap W = \mathcal{L}(u_3)$. A questo punto il generico vettore di W ha la forma $w = [2a + b, -a + c, -a, 2a]^T$ con a, b, c parametri reali e la equazione cartesiana di W è $2z + v = 0$.

3. Fissata in \mathbb{R}^3 la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, si considerino i seguenti vettori

$$\begin{aligned} v'_h &= (h+1)e_2 + he_3, & v''_h &= -e_1 + 2he_2 + (h+1)e_3, & v'''_h &= he_2 + (h+1)e_3, \\ w'_h &= e_1 + he_2, & w''_h &= e_1 + he_2 + he_3, & w'''_h &= (h-1)e_2 + he_3, \end{aligned}$$

dove h è un parametro reale.

(a) Determinare per quali valori di h esiste ed è unica l'applicazione lineare f tale che

$$\begin{aligned} f(v'_h) &= w'_h, \\ f(v''_h) &= w''_h, \\ f(v'''_h) &= w'''_h. \end{aligned}$$

Stabilire poi per quali valori di h l'applicazione lineare è suriettiva.

- (b) Per $h = -1$ scrivere la matrice rappresentativa dell'applicazione lineare rispetto alla base canonica. Verificare l'invertibilità di tale applicazione lineare.
- (c) Per $h = 0$, determinare la dimensione di nucleo ed immagine, e scrivere una base per ognuno dei due sottospazi.

Soluzione

(a) L'applicazione esiste ed è unica se e solo se i vettori v'_h, v''_h, v'''_h sono una base di \mathbb{R}^3 . La matrice le cui colonne sono le componenti di questi vettori è

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ h+1 & 2h & h \\ h & h+1 & h+1 \end{pmatrix},$$

ed ha determinante $2h+1$, pertanto per $h \neq -\frac{1}{2}$ l'applicazione esiste ed è unica. i vettori w'_h, w''_h, w'''_h generano $\text{Im}(f)$ per cui l'applicazione è suriettiva se e solo se tali vettori sono una base di \mathbb{R}^3 . La matrice le cui colonne sono le componenti di questi vettori è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ h & h & h-1 \\ 0 & h & h \end{pmatrix},$$

ed ha determinante $-h(h-1)$, quindi f è suriettiva per $h \neq 0, 1$.

(b) Per $h = -1$ sappiamo che l'applicazione è invertibile in quanto è suriettiva e essendo un endomorfismo di \mathbb{R}^3 . è anche iniettiva e pertanto biunivoca. Abbiamo

$$\begin{aligned} v'_{-1} &= -e_3, & v''_{-1} &= -e_1 - 2e_2, & v'''_{-1} &= -e_2, \\ w'_{-1} &= e_1 - e_2, & w''_{-1} &= e_1 - e_2 + e_3, & w'''_{-1} &= -2e_2 - e_3, \end{aligned}$$

da questo ricaviamo $e_1 = 2v'''_{-1} - v''_{-1}$, $e_2 = -v'''_{-1}$, $e_3 = -v'_{-1}$, da cui $f(e_1) = 2(e_1 - e_2 + e_3) - (e_1 - e_2) = -e_1 - 3e_2 - e_3$, $f(e_2) = 2e_2 + e_3$, $f(e_3) = -e_1 + e_2$. la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica è dunque

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

il suo determinante è 2 e questo conferma che l'applicazione è invertibile.

(c) Per $h = 0$, si ha $w'_0 = e_1$, $w''_0 = e_1$, $w'''_0 = -e_2$, tali vettori generano l'immagine di f che quindi ha come base $\{e_1, e_2\}$ ed ha dimensione 2, il ker ha quindi dimensione 1 e un vettore non nullo del ker è $v'_0 - v''_0 = e_2 + e_1 - e_3$ in quanto $f(v'_0 - v''_0) = f(v'_0) - f(v''_0) = e_1 - e_1 = 0$.