

# GEOMETRIA ED ALGEBRA LINEARE

## TEMA D' ESAME 19/02/2013 SOLUZIONI

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

**Esercizio 1.** Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} h & 2-h & h \\ 1 & 2 & h-1 \\ 1 & -h & 3 \end{pmatrix},$$

essendo  $h$  un parametro reale.

- (1) Determinare, al variare di  $h$  in  $\mathbb{R}$ , la caratteristica di  $A$
- (2) Determinare nucleo ed immagine dell'endomorfismo  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $f(X) = AX$ , al variare di  $h$  in  $\mathbb{R}$ .
- (3) Determinare, nel caso  $h = 1$ , il coseno dell'angolo tra  $\ker f$  ed  $\text{Im } f$

### Soluzione.

(1) Il determinante di  $A$  è uguale ad  $h^3 - 3h^2 + 10h - 8$ , e si fattorizza in  $(h-1)(h^2 - 2h + 8)$ . Il primo fattore si annulla per  $h = 1$ , mentre il secondo è sempre diverso da zero. Quindi, per  $h \neq 1$  la caratteristica di  $A$  è uguale a 3. Per  $h = 1$  si vede facilmente che la caratteristica è 2, essendoci un minore non nullo di ordine 2, per esempio  $\{R_1, R_2\} \cap \{C_1, C_2\}$ .

(2) L'endomorfismo  $f$  è rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla matrice  $A$ . Quindi, per  $h = 1$  abbiamo  $\ker f = \{0\}$  ed  $\text{Im } f = \mathbb{R}^3$ . Per  $h = 1$  l'immagine di  $f$  ha dimensione 2, ed è generata, per esempio, dalle prime due colonne di  $A$ . Il nucleo si ottiene invece risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y = 0 \\ x - y + 3z = 0. \end{cases}$$

Poiché la caratteristica di  $A$  è uguale a 2 abbiamo  $\infty^1$  soluzioni, che possono essere ottenute riducendo il sistema al seguente

$$\begin{cases} x + y = -z \\ x + 2y = 0, \end{cases}$$

da cui  $x = -2z$  ed  $y = z$ . Quindi  $\ker f = \{[-2z, z, z]^t, z \in \mathbb{R}\}$ , ed una sua base è, per esempio,  $\{[-2, 1, 1]^t\}$ .

(3) L'equazione del piano  $\text{Im } f$  è data da

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 1 & -1 & z \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x - 2y - z = 0.$$

L'angolo  $\alpha$  tra nucleo ed immagine corrisponde all'angolo tra il nucleo e la sua proiezione su tale piano. Consideriamo la retta passante per  $P(-2, 1, 1)$  e perpendicolare ad  $\text{Im } f$

$$\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 - t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Sostituendo in  $3x - 2y - z = 0$  si ottiene  $t = 9/14$ , per cui la retta interseca il piano nel punto  $H(-1/14, -2/7, 5/14)$ . Di conseguenza si ha

$$\cos \alpha = \frac{\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH} \rangle}{|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OH}|} = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

**Esercizio 2.** Nel piano euclideo, si consideri la conica  $\gamma$  di equazione

$$3x^2 - 4xy + 2y^2 - 8x + 15 = 0.$$

- (1) Classificare  $\gamma$  e ridurla a forma canonica.
- (2) Determinare l'equazione della circonferenza  $\gamma_1$  di raggio massimo contenuta in  $\gamma$ , e l'equazione della circonferenza  $\gamma_2$  di raggio minimo contenente  $\gamma$ , nel caso in cui  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  abbiano lo stesso centro di  $\gamma$ .

**Soluzione.**

(1) Dal calcolo degli invarianti otteniamo  $I_3 = -2$ ,  $I_2 = 2$ ,  $I_1 = 5$ , quindi  $\gamma$  è un'ellisse reale. La forma canonica è

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0,$$

essendo  $\lambda_1, \lambda_2$  gli autovalori associati alla parte quadratica. Dall'equazione caratteristica  $\chi(\lambda) = \lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$  ricaviamo  $\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$ . Quindi una forma canonica di  $\gamma$  risulta

$$\frac{5 - \sqrt{17}}{2} x^2 + \frac{5 + \sqrt{17}}{2} y^2 - 1 = 0.$$

(2) Il centro  $C$  di  $\gamma$  è la soluzione del sistema delle derivate parziali uguagliate a zero, cioè

$$\begin{cases} 6x - 4y - 8 = 0 \\ -4x + 4y = 0, \end{cases}$$

da cui  $C(4, 4)$ . I raggi  $R_1, R_2$  delle circonferenze  $\gamma_1, \gamma_2$  corrispondono, rispettivamente, al semiasse minore ed al semiasse maggiore di  $\gamma$ . Questi si possono dedurre immediatamente dalla forma canonica, e risultano

$$R_1 = \sqrt{\frac{2}{5 + \sqrt{17}}}, \quad R_2 = \sqrt{\frac{2}{5 - \sqrt{17}}}.$$

Pertanto si ha  $\gamma_1 : (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = \frac{2}{5 + \sqrt{17}}$ , e  $\gamma_2 : (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = \frac{2}{5 - \sqrt{17}}$ .

**Esercizio 3.** Nello spazio euclideo, si considerino il punto  $F(1, 0, 1)$  ed il piano  $\pi$  di equazione  $x - y = 0$ .

- (1) Calcolare l'equazione del luogo  $\Gamma$  formato dai punti equidistanti da  $F$  e da  $\pi$ .
- (2) Verificare che  $\Gamma$  è una quadrica di rotazione, classificarla e ridurla a forma canonica.
- (3) Determinare l'equazione dell'asse di rotazione della quadrica

**Soluzione.**

(1) Sia  $P(x, y, z)$  il generico punto dello spazio. Abbiamo  $PF = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2}$ , mentre la distanza di  $P$  da  $\pi$  risulta  $|x-y|/\sqrt{2}$ . Quindi l'equazione del luogo  $\Gamma$  è data da

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2} = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}}.$$

Elevando al quadrato entrambi i membri e semplificando otteniamo  $x^2 + 2xy + y^2 + 2z^2 - 4x - 4z + 4 = 0$ .

(2) L'equazione determinata è algebrica di secondo grado, il che mostra che  $\Gamma$  è una quadrica. Il calcolo degli invarianti fornisce  $I_4 = -8$ ,  $I_3 = 0$ , quindi si ha un paraboloido ellittico. L'equazione caratteristica risulta  $\chi(\lambda) = (2-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 1] = 0$ , le cui soluzioni sono  $\lambda = 2$  (soluzione doppia) e  $\lambda = 0$ . Essendoci un autovalore doppio non nullo la quadrica è di rotazione. Una forma canonica è del tipo  $2x^2 + 2y^2 + 2Cz = 0$ . Il coefficiente  $C$  si può ricavare calcolando l'invarianti quartico ed uguagliandolo a  $-8$ , il che fornisce  $C = \pm\sqrt{2}$ . Quindi la forma canonica risulta  $x^2 + y^2 \pm \sqrt{2}z = 0$ .

(3) L'autospazio associato all'autovalore doppio è il piano  $\pi$ , quindi l'asse di rotazione è perpendicolare a tale piano e quindi ha parametri direttori  $1, -1, 0$ . Il punto medio del segmento di perpendicolare calato da  $F$  su  $\pi$  appartiene, per definizione, al luogo  $\Gamma$ , e fornisce il punto a minima distanza da  $\pi$ . Esso è quindi il vertice del paraboloido, per cui l'asse di rotazione passa per  $F$ . Di conseguenza

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 1, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

forniscono le equazioni parametriche dell'asse di rotazione