Matrici simili e matrici diagonalizzabili

Matrici simili

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n e siano C_1 e C_2 due sue basi. Sia f:V$\rightarrow$V un endomorfismo rappresentato rispetto alla base C_1 dalla matrice A (quadrata) e rispetto alla base C_2 dalla matrice B, allora $A=P^{-1}BP$, dove P rappresenta la matrice di passaggio dalla base C_1 alla base C_2 . Questo suggerisce la seguente definizione:

- Siano A e B sue matrici quadrate dello stesso ordine n sul campo K. Diciamo che A è *simile a* B se esiste una matrice non singolare P tale che $A=P^{-1}BP$.

Si vede facilmente che due matrici simili di ordine n rappresentano uno stesso endomorfismo rispetto a due basi diverse dello spazio vettoriale V.

- La relazione di similitudine fra matrici è una relazione di equivalenza, ovvero gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.
  – Se A è simile a B, per la proprietà simmetrica B è simile ad A e possiamo allora dire che A e B sono simili.

Condizioni necessarie di similitudine

Siano A e B due matrici simili di ordine n, allora:

- A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.
  - Se $B=P^{-1}AP$ si ha $\det(B-\lambda I)=\det(P^{-1}AP-\lambda I)=\det(P^{-1}AP-P^{-1}\lambda IP)=\det P^{-1}\det(A-\lambda I)\det P = \det(A-\lambda I)$.
- A e B hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicità algebriche, lo stesso determinante e la stessa traccia.
- Gli autovalori di A e B hanno la stessa molteplicità geometrica.
  - Sia $\underline{v}$ un autovettore di A associato all'autovalore λ, allora $P^{-1}\underline{v}$ è un autovettore di B associato a λ: $B\,P^{-1}\underline{v} =P^{-1}APP^{-1}\underline{v}= P^{-1}A\underline{v}= P^{-1}\lambda\underline{v}= \lambda P^{-1}\underline{v}$. Quindi l'autospazio di A associato a λ ha la stessa dimensione dell'autospazio di B associato a λ.
- A e B hanno lo stesso rango.

➢ Le condizioni precedenti non sono sufficienti quando $n\geq 4$.

  - $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ hanno stesso rango, stesso polinomio caratteristico e ammettono il solo autovalore 0 con la stessa molteplicità algebrica e geometrica. A e B non sono simili perché $A^2=\underline{0}_{(2,2)}$ mentre $B^2\neq\underline{0}_{(2,2)}$

Matrici diagonalizzabili

- Una matrice quadrata A si dice *diagonalizzabile* se è simile ad una matrice diagonale.
- Una matrice A quadrata di ordine n ad elementi nel campo K è diagonalizzabile nel campo K se e solo se ammette n autovettori (ovviamente con elementi in K) linearmente indipendenti, o in altre parole se e solo se K^n ha una base di autovettori.
  - Se A è diagonalizzabile in K deve avere n autovalori in K (eventualmente ripetuti) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ e deve esistere una matrice non singolare P tale che $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$, da cui $AP=P\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda)$. Quindi detta $\underline{c}_i$ la i-esima colonna di P, otteniamo per ogni i, con $1\leq i\leq n$, $A\underline{c}_i=\lambda_i\underline{c}_i$, pertanto $\underline{c}_i$ è un autovettore di A relativo all'autovalore λ_i. Essendo P invertibile le sue colonne devono essere linearmente indipendenti, quindi A ammette n autovettori linearmente indipendenti.
  - Siano $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n$ autovettori (reali) linearmente indipendenti di A, e siano $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n$ gli autovalori a cui sono associati. Si ha $A\underline{v}_i=\lambda_i\underline{v}_i$ per ogni i, con $1\leq i\leq n$. Detta P la matrice formata dall'accostamento dei vettori $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_n$ si ha che P è invertibile e che $AP=P\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$, quindi $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$.

Condizione sufficiente perché A sia diagonalizzabile

- Sia A una matrice quadrata di ordine n e siano $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_s$ autovalori distinti di A. Gli autovettori $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_s$ relativi a tali autovalori sono linearmente indipendenti.
  - Procediamo per induzione su s. Se s=1, l'autovettore $\underline{v}_1$, essendo per definizione diverso dal vettore nullo, è linearmente indipendente. Supponiamo che il teorema valga per s-1 e consideriamo la scrittura (1) $c_1\underline{v}_1+c_2\underline{v}_2+\dots+c_s\underline{v}_s=\underline{0}$. Moltiplicando entrambi i membri di (1) per A a sinistra, abbiamo $c_1A\underline{v}_1+c_2A\underline{v}_2+\dots+c_sA\underline{v}_s=A\underline{0}$, da cui $c_1\lambda_1\underline{v}_1+c_2\lambda_2\underline{v}_2+\dots+c_s\lambda_s\underline{v}_s=\underline{0}$. Moltiplicando entrambi i membri di (1) per λ_1, abbiamo $c_1\lambda_1\underline{v}_1+c_2\lambda_1\underline{v}_2+\dots+c_s\lambda_1\underline{v}_s=\underline{0}$, che, sottratta alla precedente, produce $c_2(\lambda_2-\lambda_1)\underline{v}_2+\dots+c_s(\lambda_s-\lambda_1)\underline{v}_s=\underline{0}$ da cui, per ipotesi di induzione, e tenuto conto che $\lambda_i-\lambda_1\neq 0$ per ogni $2\leq i\leq s$, si ottiene $c_2=c_3=\dots=c_s=0$. Quindi dalla (1) si ha $c_1\underline{v}_1=\underline{0}$, da cui ancora $c_1=0$.

➢ Se A ha n autovalori distinti in K è diagonalizzabile in K.
  - Esistono n autovettori di A linearmente indipendenti.

- La condizione non è necessaria: la matrice diag (1,1,2) è ovviamente diagonalizzabile ma ha autovalori 1 (contato due volte) e 2, quindi non tre autovalori distinti.

Autovalori regolari

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ gli autovalori distinti di A, matrice quadrata di ordine n, e siano $m_g(\lambda_1), \dots, m_g(\lambda_s)$ le loro molteplicità geometriche e $m_a(\lambda_1), \dots, m_a(\lambda_s)$ le loro molteplicità algebriche.

- dim $(V(\lambda_1)+\dots+V(\lambda_s)) = m_g(\lambda_1)+\dots+m_g(\lambda_s)$
  - Segue dalla formula di Grassmann e dal fatto che per ogni autovalore λ_i e per ogni insieme Λ di autovalori non contenente λ_i allora $V(\lambda_i) \cap (\sum_{\lambda \in \Lambda} V(\lambda)) = \{\underline{0}\}$
- In altre parole il massimo numero di autovettori linearmente indipendenti di A è $m_g(\lambda_1)+\dots+m_g(\lambda_s)$.
- A è diagonalizzabile se e solo se $m_g(\lambda_1)+\dots+m_g(\lambda_s)=n$.
  - In tal caso e solo in tal caso A ha n autovettori linearmente indipendenti.
- Diciamo che un autovalore λ_i è *regolare* se $m_g(\lambda_i)=m_a(\lambda_i)$.

Nuova condizione necessaria e sufficiente perché A sia diagonalizzabile

- Per ogni autovalore λ' di A si ha $1 \leq m_g(\lambda') \leq m_a(\lambda')$.
  - Sia $V(\lambda')$ l'autospazio associato a λ' . Poiché $V(\lambda') \neq \{0\}$ si ha ovviamente $1 \leq m_g(\lambda')$. Sia ora $B' = \{w_1, \dots, w_g\}$ una base di $V(\lambda')$ (dove abbiamo posto $g = m_g(\lambda')$). Completiamo B' ad una base B di K^n e sia M la matrice che rappresenta la trasformazione f_A rispetto alla base B. Le colonne di M sono le coordinate delle immagini dei vettori di B rispetto alla base B stessa. Essendo $Aw_i = \lambda' w_i$ per ogni i con $1 \leq i \leq g$, M ha la forma $\left[\begin{array}{c|c} \lambda' I_g & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right]$. Ora M ed A sono simili e quindi hanno lo stesso polinomio caratteristico e quindi si ha $\det(A - \lambda I_n) = (\lambda - \lambda')^g \det(D - \lambda I_{n-g})$ da cui $g \leq m_a(\lambda')$.

➢ A è diagonalizzabile in K se e solo se tutti i suoi autovalori appartengono a K e sono regolari.

➢ Ogni autovalore di molteplicità algebrica 1 (ovvero ogni autovalore semplice) è regolare.

Sommario

Abbiamo visto:

- cosa significa che due matrici quadrate dello stesso ordine sono simili;
- quando una matrice quadrata è diagonalizzabile in un campo K;
- cosa significa che un autovalore è regolare;
- due condizioni necessarie e sufficienti e una condizione sufficiente (ma non necessaria) affinché una matrice quadrata sia diagonalizzabile in un campo K.