Isometrie e proiezioni ortogonali

Isometrie

Siano V e W due spazi euclidei e siano $\| \ \|_V$, $\| \ \|_W$ le loro norme.

- Una applicazione F: $V \to W$ si dice *isometria* se conserva le distanze , ovvero se $\left\|F\left(\underline{v}_1\right)-F\left(\underline{v}_2\right)\right\|_W=\left\|\underline{v}_1-\underline{v}_2\right\|_V$ per ogni $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$
  - Una isometria conserva anche le norma, cioè $\left\|F\left(\underline{v}\right)\right\|_W=\left\|\underline{v}\right\|_V$ per ogni $\underline{v} \in V$, e il prodotto scalare.
- Una *isometria lineare* è un'isometria che è anche un'applicazione lineare
- Una applicazione lineare F è una isometria se e solo se conserva la norma.
  - Essendo una isometria conserva la norma, viceversa se conserva la norma si ha $\|F(\underline{v}_1-\underline{v}_2)\|_W=\|\underline{v}_1-\underline{v}_2\|_V$ per ogni $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$, inoltre, essendo F lineare si ha $F(\underline{v}_1-\underline{v}_2)=F(\underline{v}_1)-F(\underline{v}_2)$, da cui segue che F conserva le distanze

Isometrie lineari

Sia V uno spazio euclideo di dimensione finita riferito ad una base ortonormale $B=\{\underline{q}_1,\dots,\underline{q}_n\}$

- Sia f:V→V un endomorfismo. Sono equivalenti
  1. f conserva la norma (è un'isometria),
  2. f conserva il prodotto scalare,
  3. la matrice che rappresenta f rispetto alla base *B* è ortogonale.

     1 implica 2 perché f è un'isometria

     2 implica 1 per definizione di norma

     1 implica 3, in quanto da 1 e da 2 (implicato da 1) si ottiene che f trasforma basi ortonormali in basi ortonormali e quindi la matrice che rappresenta f è formata dall'accostamento di vettori colonna ortonormali

     3 implica 2, infatti detta U la matrice ortogonale che rappresenta f rispetto a *B*, si ha per ogni $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$, $\langle f(\underline{v}_1),f(\underline{v}_2)\rangle = U\underline{v}_1|_B \times U\underline{v}_2|_B = (U\underline{v}_1|_B)^T(U\underline{v}_2|_B) = (\underline{v}_1|_B)^T(U^TU)\underline{v}_2|_B = (\underline{v}_1|_B)^T\underline{v}_2|_B = \langle \underline{v}_1,\underline{v}_2\rangle$

- Una matrice ortogonale rappresenta una isometria di R^n
- Ogni autovalore reale di una matrice ortogonale U è 1 o -1
  - Sia λ un autovalore reale di U con autovettore associato $\underline{x}$, poiché U è ortogonale si ha $\|\underline{x}\| = \|U\underline{x}\| = \|\lambda\underline{x}\| = |\lambda|\|\underline{x}\|$, quindi $|\lambda|=1$.

Endomorfismi di R^3 che sono isometrie

Sappiamo che una isometria lineare f di R^3 in R^3 è rappresentata da una matrice ortogonale, più precisamente

- rispetto ad una base opportuna f è rappresentata da una matrice di uno dei seguenti tipi

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ 0 & \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta\end{bmatrix} \text{ con } \lambda_1=\pm 1$$

  - Ogni matrice di ordine 3 ha almeno un autovalore reale, quindi ogni matrice ortogonale di ordine 3 ha almeno un autovalore $\lambda_1=\pm 1$
  - Sia $\underline{q}_1$ un autovettore di norma 1 associato a λ_1. Estendiamo $\underline{q}_1$ ad una base ortonormale $B=\{\underline{q}_1,\underline{q}_2,\underline{q}_3\}$ di R^3. Rispetto a B si ha $f(\underline{q}_1)=[\lambda_1,0,0]^T$. Inoltre $f(\underline{q}_1)$,$f(\underline{q}_2)$ e $f(\underline{q}_3)$ devono formare una base ortonormale e dunque le matrici che rappresentano f rispetto a *B* sono del tipo indicato.
  - Le matrici A hanno determinante λ_1 e rappresentano una rotazione di un angolo ϑ attorno alla retta generata da $\underline{q}_1$ composta con un cambiamento di verso di $\underline{q}_1$ se $\lambda_1=-1$.
  - Le matrici B hanno determinante $-\lambda_1$ e tre autovettori reali λ_1,1,-1, quindi un autovalore con molteplicità algebrica 2 e uno semplice. Si verifica facilmente che gli autovalori sono tutti regolari e che l'autospazio associato all'autovalore semplice (retta) è formato da vettori ortogonali all'autospazio associato all'autovalore doppio (piano). Se $\lambda_1=1$, allora l'isometria rappresenta una simmetria ortogonale rispetto al piano che rappresenta l'autospazio relativo all'autovalore doppio 1. Se invece $\lambda_1=-1$, l'isometria rappresenta una simmetria ortogonale rispetto alla retta che rappresenta l'autospazio relativo all'autovalore semplice 1.

Complemento ortogonale

Sia H un sottospazio di uno spazio euclideo V

- $H^{\perp}=\{\underline{v} \mid \underline{v}$ è ortogonale ad ogni vettore di H$\}$.
  - $H^{\perp}$ è un sottospazio di V,
  - $(H^{\perp})^{\perp}=H$,
  - $H \cap H^{\perp}=\{\underline{0}\}$,
  - se H ha dimensione finita, per ogni $\underline{v} \in V$ si ha $\underline{v}=\underline{v}_H+\underline{v}^{\perp}$ con $\underline{v}_H \in H$, $\underline{v}^{\perp} \in H^{\perp}$.

➢ V è somma diretta di H e $H^{\perp}$ e $H^{\perp}$ si chiama *complemento ortogonale* di H.

➢ Se V ha dimensione n, allora dim $H^{\perp}$=n-dim H.

➢ Sia dim V=n e siano $\{\underline{b}_1,\underline{b}_2,\ldots,\underline{b}_d\}$ una base ortogonale di H e $B=\{\underline{b}_1,\underline{b}_2,\ldots,\underline{b}_d,\underline{b}_{d+1},\ldots,\underline{b}_n\}$ il suo completamento ad una base ortogonale di V, allora $\{\underline{b}_{d+1},\ldots,\underline{b}_n\}$ è una base (ortogonale) di $H^{\perp}$. Quindi se $\underline{v} \in H$, si ha $\underline{v}|_B=[x_1,x_2,\ldots,x_d,0,\ldots,0]^T$ e se $\underline{v} \in H^{\perp}$ si ha $\underline{v}|_B=[0,\ldots, x_{d+1},x_{d+2},\ldots,x_n]^T$.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Matrici di una proiezione ortogonale

Sia H un sottospazio di R^n. La funzione f che ad ogni vettore $\underline{v} \in R^n$ associa la sua proiezione ortogonale v_H su H è un'applicazione lineare f: $R^n \to R^n$. Vogliamo trovare la matrice che rappresenta f.

- Siano $C=\{\underline{q}_1,\underline{q}_2,\ldots,\underline{q}_d\}$ una base ortonormale di H, $A=[\underline{q}_1|\underline{q}_2|\ldots|\underline{q}_d]$ la matrice di tipo (n,d) formata dall'accostamento dei vettori di *C*, allora la matrice che rappresenta f è $P=AA^T$.
  - Estendiamo la base *C* ad una base ortonormale $B=\{\underline{q}_1,\underline{q}_2,\ldots,\underline{q}_d,\underline{q}_{d+1},\ldots,\underline{q}_n\}$ di R^n.
  - Rispetto alla base *B* la f è rappresentata dalla matrice $D=\left[\begin{array}{c|c} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$, infatti la applicazione f porta ogni vettore di H (e quindi in particolare ogni vettore di *C*) in se stesso ed ogni vettore di $H^\perp$ (e quindi i vettori $\underline{q}_{d+1},\ldots,\underline{q}_n$) nel vettore $\underline{0}$, inoltre ovviamente, ogni $\underline{q}_i$ con $1 \le i \le d$, rispetto alla base *B* è rappresentato da una n-upla con 1 al posto i-esimo e 0 nelle altre posizioni. La matrice P è simile a D e la matrice di passaggio è la matrice $U=[A|B]$ formata dall'accostamento dei vettori della base *B*, in quanto i $\underline{q}_i$ con $1 \le i \le d$, sono autovettori di f associati all'autovalore 1 e i $\underline{q}_j$ con $d < j \le n$ sono autovettori di f associati all'autovalore 0. Inoltre U è ortogonale. Dunque $U^{-1}PU=U^TPU=D$ e dunque $P=UDU^T=[A|B]\left[\begin{array}{c|c} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} A^T \\ B^T \end{bmatrix}$ cui si ottiene subito $P=AA^T$.

Caratterizzazione delle matrici di proiezione ortogonale

Vogliamo ora stabilire quali matrici rappresentano una proiezione ortogonale di R^n su un suo sottospazio. Iniziamo con la seguente osservazione

- Per ogni matrice reale A si ha ker A= (Row A)$^\perp$.
- Una matrice reale quadrata P di ordine n è la matrice di una proiezione ortogonale su un sottospazio H di R^n, se e solo se P è idempotente (P^2=P) e simmetrica.
  - Sappiamo che, se P è la matrice di una proiezione ortogonale, P=AA^T , per una opportuna matrice A, quindi P è simmetrica. Inoltre per ogni $\underline{v}\in R^n$, si ha $P\underline{v}=\underline{v}_H$ e quindi $P^2\underline{v}=P\underline{v}_H=\underline{v}_H=P\underline{v}$ da cui $P^2=P$
  - Viceversa, sia P idempotente e simmetrica. Sia H=Col P. Per ogni $\underline{v}\in R^n$ il vettore $P\underline{v}$ è una combinazione lineare delle colonne di P e quindi sta in H. Il vettore $\underline{v}-P\underline{v}$ appartiene invece a $H^\perp$, infatti $P(\underline{v}-P\underline{v})= P\underline{v}-P^2\underline{v}=\underline{0}$ (per l'idempotenza di P) dunque $\underline{v}-P\underline{v}\in$ ker P= (Row P)$^\perp$= (Col P)$^\perp$ perché P è simmetrica. Pertanto $\underline{v}=P\underline{v}+(\underline{v}-P\underline{v})$ con $P\underline{v}\in H$, $\underline{v}-P\underline{v}\in H^\perp$ e $P\underline{v}$ è la proiezione ortogonale di $\underline{v}$ su H.

➢ Se P è una matrice idempotente e ortogonale, P è la matrice della proiezione ortogonale di R^n sul sottospazio H=Col P, inoltre $H^\perp$ =ker P.

Sommario

Abbiamo visto

- cosa è un’isometria e cosa è una isometria lineare;
- quali matrici rappresentano una isometria lineare rispetto a una base ortonormale;
- cosa è il complemento ortogonale di un sottospazio di uno spazio euclideo;
- come si calcolano le matrici che rappresentano la proiezioni ortogonale di un vettore su un sottospazio;
- come si caratterizzano tali matrici.