

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE		
Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Appello del 10 febbraio 2015		
Cognome:	Nome:	Matricola:

Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.

1. Dato il parametro reale h , consideriamo il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x + hy + (h-1)z = 1 \\ x + hy - z = 0 \\ x - hy + (h+2)z = 2 \end{cases}$$

- Discutere e dove possibile risolvere il sistema.
- Interpretare geometricamente i risultati.
- Indicare un valore di h per cui le equazioni del sistema rappresentino tre piani appartenenti ad un fascio. Determinare quindi la direzione della retta sostegno del fascio.

2. Dato il parametro reale h , consideriamo le seguenti matrici:

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ h+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Trovare, se esistono, i valori di h per i quali le due matrici sono simili. In tali casi dire se A_h e B sono ortogonalmente simili.
- Stabilire se esistono valori di h per cui A_h è ortogonalmente diagonalizzabile.
- Per i valori di h di cui al punto precedente individuare una matrice ortogonale Q che diagonalizza A_h .

3. Si consideri la conica \mathcal{C} di equazione

$$\mathcal{C} : x^2 + 4xy + 4y^2 - x = 0.$$

- Riconoscere la conica.
- Scrivere \mathcal{C} in forma canonica determinando l'opportuno cambiamento di coordinate.
- Trovare la direzione dell'asse o degli assi di simmetria di \mathcal{C} .

Soluzioni

1. (a) Attraverso il metodo di eliminazione di Gauss possiamo ridurre a scala la matrice orlata $(A|\mathbf{b})$ associata al sistema lineare:

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & h & h-1 & 1 \\ 1 & h & -1 & 0 \\ 1 & -h & h+2 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & h & h-1 & 1 \\ 0 & h & -(h+1) & -1 \\ 0 & -2h & h+3 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & h & h-1 & 1 \\ 0 & h & -(h+1) & -1 \\ 0 & 0 & -h+1 & 0 \end{array} \right).$$

Se $h \neq 0$, 1 si ha $rk(A|\mathbf{b}) = rk(A) = 3$, e dunque il sistema ammette una e una sola soluzione che è $z = 0$, $y = -\frac{1}{h}$, $x = 1$.

Se $h = 0$ si ha $rk(A|\mathbf{b}) = 3$ e $rk(A) = 2$ e per il teorema di Rouché-Capelli il sistema non ammette soluzioni. Se $h = 1$ si ha $rk(A|\mathbf{b}) = rk(A) = 2$ e per il teorema di Rouché-Capelli il sistema ammette ∞^1 soluzioni che sono $x = 1 - s$, $y = -1 + 2s$, $z = s$ con s parametro arbitrario.

- (b) Dal punto di vista geometrico le 3 equazioni del sistema possono essere viste come equazioni di piani nello spazio.

Per $h \neq 0, 1$ tali piani hanno un punto comune (appartengono ad una stella ma non ad uno stesso fascio).

Per $h = 0$, i tre piani sono tutti paralleli all'asse y e a due a due si intersecano lungo rette distinte parallele all'asse y .

Per $h = 1$, i tre piani appartengono ad uno stesso fascio, che ha come sostegno la retta rappresentata in forma parametrica dalle soluzioni del sistema.

- (c) Una terna di parametri direttori per tale retta è dunque $(-1, 2, 1)$.

2. (a) Se due matrici sono simili hanno lo stesso determinante, si ha subito che $\det B = 2$ e $\det A_h = 2(-2h - 1)$ e dunque per $h \neq -1$ le due matrici non sono simili. Consideriamo il caso $h = -1$. Entrambe le matrici hanno autovalori 1 con molteplicità algebrica 2 e 2 con molteplicità algebrica 1. La molteplicità geometrica di 1 per la matrice A_{-1} è 1 e dunque A_{-1} non è diagonalizzabile, pertanto non può essere simile a B che è una matrice diagonale. Quindi non esistono valori di h per cui A_h è simile a B e a maggior ragione non esistono valori di h per cui A_h è ortogonalmente simile a B .

- (b) Se $h = 1$ la matrice A_1 è reale simmetrica e quindi per il teorema spettrale è ortogonalmente diagonalizzabile.

- (c) Gli autovalori di A_1 sono $-1, 2, 3$ e dunque A_1 è simile alla matrice $D = \text{diag}(-1, 2, 3)$. Troviamo ora i suoi autovettori. Gli autovettori di A_1 associati all'autovalore -1 sono i vettori $(h, -h, 0)$ con $h \neq 0$, quelli associati all'autovalore 2 sono i vettori $(0, 0, k)$ con $k \neq 0$ e quelli associati all'autovalore 3 sono i vettori $(t, t, 0)$ con $t \neq 0$. Poiché una matrice che diagonalizza A_1 e la porta in D è formata accostando tre autovettori relativi rispettivamente a $-1, 2, 3$, e poiché autovettori di una matrice reale simmetrica relativi ad autovalori distinti sono sempre ortogonali, per avere una matrice di passaggio ortogonale basta prendere gli autovalori di norma 1 e dunque

$$U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Le due matrici associate alla conica \mathcal{C} sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 4 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essendo $\det B = -1$ e $\det A = 0$ la conica \mathcal{C} è una parabola non degenera.

- (b) Gli autovalori di A sono 0 e 5, quindi la forma canonica di \mathcal{C} sarà del tipo $5X^2 + 2pY = 0$. Essendo l'invariante cubico della conica così scritta $-5p^2$, si ottiene quindi $-5p^2 = -1$ ovvero $p = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$, quindi la forma canonica di \mathcal{C} è $X^2 + \frac{2}{5\sqrt{5}}Y = 0$. Gli autovettori di A relativi

all'autovalore 0 sono $(2h, -h)$ con $h \neq 0$, quelli relativi all'autovettore 5 sono $(k, 2k)$ con $k \neq 0$. Quindi con la rotazione

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' = x \\ \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' = y \end{cases}$$

Si porta la conica nella forma $5(x')^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' = 0$.

Applicando una traslazione $x' = X + a$, $y' = Y + b$ si ottiene $5X^2 + (10a - \frac{1}{\sqrt{5}})X + \frac{2}{\sqrt{5}}Y + (5a^2 - \frac{a}{\sqrt{5}} + \frac{2b}{\sqrt{5}}) = 0$.

Pertanto la rototraslazione

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}}(X + \frac{1}{10\sqrt{5}}) - \frac{2}{\sqrt{5}}(Y + \frac{\sqrt{5}}{100}) = x \\ \frac{2}{\sqrt{5}}(X + \frac{1}{10\sqrt{5}}) + \frac{1}{\sqrt{5}}(Y + \frac{\sqrt{5}}{100}) = y \end{cases}$$

trasforma la conica di partenza nella forma canonica prima indicata.

- (c) L'asse di una parabola ha la direzione dell'autovettore associato all'autovalore 0 e quindi $(2, -1)$.