

Un po' di geometria



Coordinate cartesiane (ortogonali e monometriche)

- Un vettore di modulo 1 si chiama *versore*.
- L'*angolo di due vettori* \underline{v} e \underline{w} è l'angolo convesso formato da due vettori paralleli ed equiversi a \underline{v} e \underline{w} applicati in uno stesso punto O (questa definizione non dipende da O).
- Due vettori \underline{v} e \underline{w} sono *ortogonali* ($\underline{v} \perp \underline{w}$) se formano un angolo retto.
- Un sistema di riferimento nel piano è un sistema di *coordinate cartesiane* ortogonali monometriche se \underline{b}_1 e \underline{b}_2 sono versori ortogonali (e \underline{b}_1 si sovrappone a \underline{b}_2 descrivendo in senso antiorario l'angolo retto).
- Un sistema di riferimento nello spazio è un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche se \underline{b}_1 , \underline{b}_2 , \underline{b}_3 sono versori a due a due ortogonali e se quando \underline{b}_1 e \underline{b}_2 hanno rispettivamente il verso del pollice e dell'indice della mano destra, \underline{b}_3 ha la direzione del medio (terna destrorsa).

Distanza di due punti in coordinate cartesiane

- Siano \underline{v} , \underline{w} due vettori ortogonali, allora dal teorema di Pitagora si ha $\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + \|\underline{w}\|^2$.

➤ Sia $\underline{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ rispetto ad una base di versori a due a due ortogonali

(base ortonormale) allora $\|\underline{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

➤ Nello spazio riferito ad un sistema di coordinate cartesiane siano $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$, allora

$$\text{dist}(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

- Siano \underline{v} , \underline{w} due vettori; la *proiezione ortogonale* di \underline{v} nella direzione di \underline{w} è un vettore \underline{v}' tale che
 - \underline{v}' è parallelo a \underline{w}
 - $\underline{v} - \underline{v}'$ è ortogonale a \underline{w}

Angolo di due vettori in coordinate cartesiane

- Se \underline{v} e \underline{w} sono vettori non nulli che formano un angolo θ allora per definizione di coseno $\underline{v}' = \|\underline{v}\| \cos \theta \frac{\underline{w}}{\|\underline{w}\|}$ (dove \underline{v}' è la proiezione ortogonale di \underline{v} nella direzione di \underline{w})
- Se \underline{v} e \underline{w} sono vettori non nulli che formano un angolo θ , il prodotto scalare di \underline{v} e \underline{w} è il numero reale definito da $\underline{v} \cdot \underline{w} = \|\underline{v}\| \|\underline{w}\| \cos \theta$ (ovviamente se uno dei due vettori è nullo il prodotto scalare è 0).
- Il prodotto scalare ha le seguenti proprietà:
 - Per ogni coppia di vettori $\underline{v}, \underline{w}$, $\underline{v} \cdot \underline{w} = \underline{w} \cdot \underline{v}$
 - Per ogni terna di vettori $\underline{v}, \underline{w}, \underline{u}$, $(\underline{v} + \underline{w}) \cdot \underline{u} = \underline{v} \cdot \underline{u} + \underline{w} \cdot \underline{u}$
 - Per ogni scalare t e per ogni coppia di vettori $\underline{v}, \underline{w}$, $t \underline{v} \cdot \underline{w} = t(\underline{v} \cdot \underline{w})$
 - Per ogni \underline{v} , $\underline{v} \cdot \underline{v} \geq 0$ e $\underline{v} \cdot \underline{v} = 0$ se e solo se $\underline{v} = \underline{0}$
- Se rispetto ad una base ortonormale $\underline{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$, $\underline{w} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ allora (dalle proprietà del prodotto scalare) si ottiene $\underline{v} \cdot \underline{w} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$, da cui

$$\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Prodotto scalare di due vettori

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K si dice *prodotto scalare* una funzione $f:V \times V \rightarrow K$ che ad ogni coppia di vettori $\underline{v}, \underline{w} \in V$ associa uno scalare $\underline{v} \cdot \underline{w}$ tale che

- Per ogni $\underline{v}, \underline{w}$, $\underline{v} \cdot \underline{w} = \underline{w} \cdot \underline{v}$
- Per ogni terna di vettori $\underline{v}, \underline{w}, \underline{u}$, $(\underline{v} + \underline{w}) \cdot \underline{u} = \underline{v} \cdot \underline{u} + \underline{w} \cdot \underline{u}$
- Per ogni scalare t e per ogni coppia di vettori $\underline{v}, \underline{w}$, $t \underline{v} \cdot \underline{w} = t(\underline{v} \cdot \underline{w})$
- Per ogni \underline{v} , $\underline{v} \cdot \underline{v} \geq 0$ e $\underline{v} \cdot \underline{v} = 0$ se e solo se $\underline{v} = \underline{0}$.
- Il prodotto scalare che abbiamo definito precedentemente è quindi un particolare prodotto scalare
- Dalla definizione di prodotto scalare si possono ricavare:
 - Modulo di un vettore
 - Angolo fra due vettori
 - Proiezione ortogonale di un vettore nella direzione di un altro

Prodotto vettoriale

- Il prodotto vettoriale di due vettori \underline{v} , \underline{w} è definito come il vettore $\underline{v} \times \underline{w}$ che ha
 - modulo $\|\underline{v}\| \|\underline{w}\| |\sin \theta|$, dove θ è l'angolo formato da \underline{v} , \underline{w}
 - direzione perpendicolare al piano individuato dai vettori \underline{v} , \underline{w}
 - verso tale che la terna \underline{v} , \underline{w} , $\underline{v} \times \underline{w}$ sia destrorsa
- Il prodotto vettoriale ha le seguenti proprietà:
 - Per ogni $\underline{v}, \underline{w}$ $\underline{v} \times \underline{w} = -\underline{w} \times \underline{v}$
 - Per ogni terna di vettori $\underline{v}, \underline{w}, \underline{u}$, e per ogni coppia di scalari t, r
($t\underline{v} + r\underline{w}$) \times $\underline{u} = t(\underline{v} \times \underline{u}) + r(\underline{w} \times \underline{u})$ (e $\underline{u} \times (t\underline{v} + r\underline{w}) = t(\underline{u} \times \underline{v}) + r(\underline{u} \times \underline{w})$)
 - Per ogni $\underline{v}, \underline{w}$ $\underline{v} \times \underline{w} = \underline{0}$ se e solo se \underline{v} e \underline{w} sono paralleli

- Se rispetto ad una base ortonormale $\underline{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$, $\underline{w} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ allora

$$\underline{v} \times \underline{w} = \begin{bmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ -x_1 z_2 + x_2 z_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix} \quad (\text{per le proprietà del prodotto vettoriale})$$

Prodotto misto

- Il prodotto misto di tre vettori \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} è lo scalare $\underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{w})$.
- Il valore assoluto del prodotto misto $\underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{w})$ è il volume del parallelepipedo di spigoli \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} ; tale prodotto è positivo se la terna è destrorsa, negativo se la terna è sinistrorsa.
- I tre vettori \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} sono linearmente dipendenti se e solo se $\underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{w}) = 0$.
- Se $\underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{w}) = 0$ e $\underline{v} \times \underline{w} \neq \underline{0}$, \underline{u} è combinazione lineare di \underline{v} , \underline{w} .

Equazioni parametriche di una retta nello spazio

Supponiamo di riferire lo spazio ad un sistema di coordinate cartesiane con origine O.

- Scrivere le equazioni di una retta r parallela ad un vettore $\underline{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ e passante per $A = (x_0, y_0, z_0)$.
 1. Un punto $P = (x, y, z)$ appartiene ad r se e solo se \overrightarrow{AP} è parallelo a \underline{v}
 2.
$$\overrightarrow{AP} = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}$$
 3. Le equazioni (parametriche) della retta sono
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$
 dove t è un parametro reale
- La terna (a, b, c) si dice terna di *parametri direttori* della retta r . Rappresentando \underline{v} una direzione, le sue componenti a, b, c non possono essere contemporaneamente nulli.
Se $\|\underline{v}\| = 1$ le componenti di \underline{v} si chiamano *coseni direttori* di r

Retta per due punti

- Scrivere le equazioni di una retta r passante per i punti (distinti) $A=(x_0, y_0, z_0)$ e $B=(x_1, y_1, z_1)$

1. La retta è la retta per A con direzione \overrightarrow{AB}

2.
$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{bmatrix}$$

3. Le equazioni (parametriche) della retta sono allora

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t \end{cases} \quad \text{dove } t \text{ è un parametro reale}$$

- Osservate che le equazioni della retta si possono scrivere nella forma

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0} \quad \text{se } x_0 \neq x_1, y_0 \neq y_1, z_0 \neq z_1$$

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} \\ z = z_0 \end{cases} \quad \text{se } x_0 \neq x_1, y_0 \neq y_1, z_0 = z_1 \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases} \quad \text{se } y_0 = y_1, z_0 = z_1$$

Condizioni di parallelismo e perpendicolarità fra rette

Da quanto abbiamo visto precedentemente abbiamo che

- Due rette sono *parallele* se e solo se le loro terne di parametri direttori sono proporzionali.
- Due rette r ed s sono *perpendicolari* se e solo se dette (a,b,c) una terna di parametri direttori di r ed (a',b',c') una terna di parametri direttori di s si ha $aa'+bb'+cc'=0$. (Ricordate che due rette perpendicolari non sono necessariamente incidenti).
- Notate che i parametri direttori di una retta scritta in equazioni parametriche sono la terna di coefficienti del parametro ed in generale sono dati dalla differenza di coordinate omonime di due punti distinti sulla retta.

Equazioni parametriche di un piano nello spazio

Supponiamo di riferire lo spazio ad un sistema di coordinate cartesiane con origine O .

- Scrivere le equazioni di un piano π passante per $A=(x_0, y_0, z_0)$ e parallelo ai vettori $\underline{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$, $\underline{w} = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$

1. Un punto $P=(x, y, z)$ appartiene al piano π se e solo se \overrightarrow{AP} è combinazione lineare di \underline{v} e \underline{w}

2.
$$\overrightarrow{AP} = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}$$

3. Le equazioni (parametriche) del piano π sono

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t + a_2 u \\ y = y_0 + b_1 t + b_2 u \\ z = z_0 + c_1 t + c_2 u \end{cases} \quad \text{dove } t \text{ ed } u \text{ sono parametri reali}$$

Equazione cartesiana del piano

- Eliminando i parametri t ed u dalle equazioni parametriche del piano si trova un'equazione della forma $ax+by+cz+d=0$ (equazione cartesiana del piano) ove $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \underline{v} \times \underline{w}$, quindi $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ è un vettore ortogonale al piano. Questo si poteva trovare direttamente osservando che un punto P appartiene al piano per A parallelo a \underline{v} , \underline{w} se e solo se \overrightarrow{AP} è ortogonale a $\underline{v} \times \underline{w}$.
 - Viceversa ogni equazione $ax+by+cz+d=0$ rappresenta un piano ortogonale al vettore $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.
- Data l'equazione cartesiana di un piano la terna dei coefficienti delle incognite è detta terna dei *parametri direttori del piano* e rappresenta la direzione della retta normale al piano

Piano per 3 punti

- Scrivere le equazioni di un piano passante per tre punti (non allineati) $A=(x_0, y_0, z_0)$, $B=(x_1, y_1, z_1)$, $C=(x_2, y_2, z_2)$

– Il piano è il piano per A parallelo ai vettori \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC}

Le equazioni (parametriche) della piano sono allora

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t + (x_2 - x_0)u \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t + (y_2 - y_0)u \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t + (z_2 - z_0)u \end{cases} \quad \text{dove } t, u \text{ sono parametri reali}$$

- Condizione di allineamento di tre punti: $A=(x_0, y_0, z_0)$, $B=(x_1, y_1, z_1)$, $C=(x_2, y_2, z_2)$

– A,B,C sono allineati se e solo se i vettori \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} sono paralleli, quindi se e solo se esiste un numero reale $k \neq 0$ tale che

$$x_1 - x_0 = k(x_2 - x_0), \quad y_1 - y_0 = k(y_2 - y_0), \quad z_1 - z_0 = k(z_2 - z_0)$$

Condizioni di parallelismo e perpendicolarità fra piani e fra retta e piano

- Due piani sono *paralleli* se e solo se le loro terne di parametri direttori sono proporzionali.
- Due piani sono *perpendicolari* se e solo se la somma dei prodotti dei loro parametri direttori è 0.
- Una retta e un piano sono paralleli se e solo se la somma dei prodotti dei loro parametri direttori è 0.
- Una retta e un piano sono perpendicolari se e solo se le loro terne di parametri direttori sono proporzionali.

(Ricordarsi che i parametri direttori di un piano sono i parametri direttori di una retta normale al piano)