Esame di Geometria
Politecnico di Milano – Ingegneria

Secondo compito in itinere – 4 Luglio 2012

1. Determinare i valori del parametro reale k per i quali la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 2k+1 & 1 & k \\ 0 & k+3 & 0 \\ 0 & 1 & 3k+1 \end{bmatrix}$$
è diagonalizzabile.

2. Sia $X = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x-y+2z=0\,,\ \ x+z-t=0\}$ un sottospazio di $\mathbb{R}^4$.
   (a) Determinare una base ortogonale di X.
   (b) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{v} = (1,1,-1,1)$ sul sottospazio X.

3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare rappresentata, rispetto alla base canonica, dalla matrice
$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{8-\sqrt{3}}{10} & \dfrac{1}{2\sqrt{5}} & \dfrac{-2-\sqrt{3}}{5} \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{5}} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{-2-\sqrt{3}}{5} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{1-2\sqrt{3}}{5} \end{bmatrix}.$$
   (a) Riconoscere f e determinarne gli elementi caratteristici.
   (b) Calcolare A^{13}.
   (c) Dato $\mathbf{x} = (1,1,1)$, calcolare la norma di $f(\mathbf{x})$.

4. Siano $\pi_1 \ : \ x-2y+3z-1=0$ e $\pi_2 \ : \ x-2y+3z+13=0$.
   (a) Stabilire se π_1 e π_2 sono paralleli.
   (b) Scrivere l'equazione cartesiana della sfera S tangente al piano π_1 nel punto $P_1 \equiv (2,2,1)$ e tangente al piano π_2.

5. Sia Γ la conica di equazione $x^2+6xy-7y^2+4x+4y+2=0$.
   (a) Riconoscere Γ.
   (b) Determinare il centro e gli assi di Γ.
   (c) Scrivere l'equazione in forma canonica di Γ.
   (d) Data la conica $\Gamma' \ : \ 2x^2-8y^2-4x+1=0$, stabilire se esiste una rototraslazione che porta Γ in Γ'.

Risposte

1. Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 2k+1$, $\lambda_2 = k+3$, $\lambda_3 = 3k+1$. Ci sono almeno due autovalori uguali quando $k = 0, 1, 2$. La matrice risulta essere diagonalizzabile per $k \neq 1$.

2. (a) Una base ortogonale di X è data, ad esempio, dai vettori
$$\mathbf{x}_1 = (1, 1, 0, 1), \qquad \mathbf{x}_2 = (1, -1, -1, 0).$$
   (b) La proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ su X è
$$\mathbf{v}' = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{x}_1 \rangle}{\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle} \mathbf{x}_1 + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{x}_2 \rangle}{\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle} \mathbf{x}_2 = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1 \right).$$

3. (a) Poiché la matrice A è ortogonale e $|A| = 1$, la trasformazione f è una rotazione. Più precisamente, risulta essere la rotazione di un angolo $\theta = \frac{5}{6}\pi$ attorno al vettore $\mathbf{a} = (2, 0, -1)$, in senso antiorario.
   (b) Poiché $A = R(\mathbf{a}; \frac{5}{6}\pi)$, si ha
$$A^{13} = R\left(\mathbf{a}; 13\,\frac{5}{6}\pi\right) = R\left(\mathbf{a}; 10\pi + \frac{5}{6}\pi\right) = R\left(\mathbf{a}; \frac{5}{6}\pi\right) = A.$$
   (c) Poiché f è una rotazione, si ha $||f(\mathbf{x})|| = ||\mathbf{x}|| = \sqrt{3}$.

4. I piani π_1 e π_2 sono paralleli. Quindi il centro C di S è il punto medio del segmento P_1P_2, dove P_2 è la proiezione ortogonale di P_1 su P_2, e il raggio r è la metà dello stesso segmento. Si ha $P_2 \equiv (1, 4, -2)$, $C \equiv (3/2, 3, -1/2)$, $r = \sqrt{14}/2$. Quindi $S : (x - 3/2)^2 + (y-3)^3 + (z + 1/2)^2 = 7/2$, ossia
$$S : x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 6y + z + 8 = 0.$$

5. (a) Γ è un'iperbole (non equilatera) non degenere ($I_3 = 16$, $I_2 = -16$, $I_1 = -6$).
   (b) Il centro è $C \equiv (-5/4, -1/4)$, mentre gli assi sono le rette di equazioni $3x + y + 4 = 0$ e $2x - 6y + 1 = 0$.
   (c) L'equazione in forma canonica è $2x^2 - 8y^2 = 1$, ossia $\frac{x^2}{1/2} - \frac{y^2}{1/8} = 1$.
   (d) Poiché $\Gamma' : 2(x-1)^2 - 8y^2 = 1$, Γ e Γ' hanno la medesima equazione in forma canonica e quindi esiste una rototraslazione che porta l'una nell'altra.