

Forme quadratiche e polinomi di II grado

Forme quadratiche reali

- Una *forma quadratica reale* $q(\underline{x})=q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è un polinomio omogeneo (forma) di secondo grado (quadratica) nelle variabili x_1, x_2, \dots, x_n ($n \geq 1$) a coefficienti in \mathbb{R} :

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + a_{nn}x_n^2,$$

dove si indica con $2a_{ij}$ il coefficiente di ogni termine misto $x_i x_j$ per poter passare alla seguente scrittura matriciale:

$$q(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x}$$

dove $\underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ ed A è la matrice reale simmetrica con elementi a_{ij} .

- Ad ogni forma quadratica reale viene associata una matrice reale simmetrica e viceversa ogni matrice reale simmetrica è associata ad una forma quadratica reale
- Sia $q(\underline{x})$ una forma quadratica reale ($\underline{x} \in \mathbb{R}^n$)
 - $q(\underline{0}) = 0$
 - $q(t\underline{v}) = t^2 q(\underline{v})$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$.
 - Per ogni vettore $\underline{w} \in L(\underline{v})$ con $\underline{w} \neq \underline{0}$, $q(\underline{w})$ e $q(\underline{v})$ hanno lo stesso segno.

Segno di una forma quadratica

Sia $q(\underline{x})$ una forma quadratica reale ad n variabili

- $q(\underline{x})$ si dice *definita positiva* se per ogni $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ con $\underline{v} \neq \underline{0}$ si ha $q(\underline{v}) > 0$
- $q(\underline{x})$ si dice *definita negativa* se per ogni $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ con $\underline{v} \neq \underline{0}$ si ha $q(\underline{v}) < 0$
- $q(\underline{x})$ si dice *semidefinita positiva* se per ogni $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha $q(\underline{v}) \geq 0$ ed esiste un $\underline{w} \neq \underline{0}$ tale che $q(\underline{w}) = 0$
- $q(\underline{x})$ si dice *semidefinita negativa* se per ogni $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha $q(\underline{v}) \leq 0$ ed esiste un $\underline{w} \neq \underline{0}$ tale che $q(\underline{w}) = 0$
- $q(\underline{x})$ si dice *indefinita* se esistono $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$ tali che $q(\underline{v}) > 0$ e $q(\underline{w}) < 0$
- ✓ Una matrice simmetrica reale A si dice definita positiva, definita negativa, semidefinita positiva, semidefinita negativa o indefinita in accordo al segno della forma quadratica $\underline{x}^T A \underline{x}$ a cui A è associata.

Segno di una matrice e prodotto scalare

- Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n , riferito ad una base $B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$. $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$ è un prodotto scalare in V se e solo se $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = (\underline{v} |_B)^T C \underline{w} |_B$ ove C è una matrice reale simmetrica definita positiva.
 - Sappiamo già che se $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$ è un prodotto scalare in V riferito alla base B , allora $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = (\underline{v} |_B)^T C \underline{w} |_B$ ove C è la matrice con elementi $c_{ij} = \langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle$. C è dunque reale e simmetrica. Sia $q(\underline{x})$ la forma quadratica associata a C . Essendo $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = (\underline{x} |_B)^T C \underline{x} |_B$ la positività del prodotto scalare implica che per ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x} \neq \underline{0}$, $q(\underline{x}) > 0$, dunque C è una matrice definita positiva
 - Viceversa, se C è una matrice reale simmetrica definita positiva, è immediato verificare che $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = (\underline{v} |_B)^T C \underline{w} |_B$ è un prodotto scalare su V e che rispetto a tale prodotto scalare $c_{ij} = \langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle$.

Segno di una forma quadratica e autovalori della matrice associata

Siano A una matrice reale simmetrica e $q(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x}$ la forma quadratica ad essa associata

- Se λ è un autovalore di A associato all'autovettore \underline{v} , allora $q(\underline{v}) = \lambda \|\underline{v}\|^2$.
 - $q(\underline{v}) = \underline{v}^T A \underline{v} = \underline{v}^T \lambda \underline{v} = \lambda \|\underline{v}\|^2$
- Siano λ_{\min} e λ_{\max} il massimo ed il minimo degli autovalori di A , allora $\lambda_{\min} \|\underline{x}\|^2 \leq q(\underline{x}) \leq \lambda_{\max} \|\underline{x}\|^2$.
 - Poiché A è diagonalizzabile, esiste una matrice ortogonale U tale che $U^T A U = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, quindi considerato il vettore $\underline{x} = U \underline{X}$ con $\underline{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$, si ha $q(\underline{x}) = \underline{x}^T \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \underline{x} = \lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \dots + \lambda_n X_n^2$, da cui $\lambda_{\min} \|\underline{X}\|^2 \leq q(\underline{x}) \leq \lambda_{\max} \|\underline{X}\|^2$, ed essendo $\underline{x} = U \underline{X}$ una trasformazione isometrica $\|\underline{x}\|^2 = \|\underline{X}\|^2$

Alcune conseguenze

- Una matrice reale simmetrica (e quindi la forma quadratica associata) è
 - definita positiva (negativa) se e solo se i suoi autovalori sono tutti positivi (negativi),
 - semidefinita positiva (negativa) se e solo se i suoi autovalori sono tutti maggiori (minori) o uguali a 0 ed uno almeno è 0,
 - indefinita se ha almeno un autovalore negativo ed almeno uno positivo.
- Una matrice quadrata di ordine 2 è
 - definita positiva (negativa) se e solo se ha determinante >0 e traccia >0 (<0)
 - semidefinita positiva (negativa) se e solo se ha determinante nullo e traccia >0 (<0)
 - indefinita se e solo se ha determinante <0

Minori principali e segno di una forma quadratica

Sia A una matrice quadrata di ordine n

- Si dice *minore principale* di A il determinante di una sottomatrice quadrata di A la cui diagonale principale stia sulla diagonale di A (ovvero una sottomatrice ottenuta eliminando da A le stesse righe e colonne).
- Un minore principale di NO di ordine k ($\leq n$) di A è il determinante della sottomatrice ottenuta da A eliminando le ultime $n-k$ righe e colonne.

Sia A reale simmetrica e sia $q(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x}$

- $q(\underline{x})$ è definita positiva se e solo se tutti i minori principali di NO di A sono positivi
- $q(\underline{x})$ è definita negativa se e solo se tutti i minori principali di NO di A sono positivi se di ordine pari e negativi se di ordine dispari ovvero se tutti i minori principali di NO di A di ordine k hanno segno $(-1)^k$
- $q(\underline{x})$ è semidefinita positiva se e solo se tutti i minori principali di A sono non negativi e esiste un minore principale di NO nullo
- $q(\underline{x})$ è semidefinita negativa se e solo se tutti i minori principali di A di ordine k o sono nulli o hanno segno $(-1)^k$ ed esiste un minore principale di NO nullo

Matrici congruenti

- Sia A una matrice quadrata. Una matrice B si dice *congruente* ad A se esiste una matrice non singolare S tale che $B=S^TAS$.
 - La relazione di congruenza è una relazione di equivalenza e quindi possiamo dire semplicemente che A e B sono congruenti.
- Se A e B sono congruenti A è simmetrica se e solo se B è simmetrica.
- Due matrici simmetriche rappresentano una stessa forma quadratica (rispetto a basi diverse) se e solo se sono congruenti. Due matrici ortogonalmente simili sono congruenti, ma non vale il viceversa
- Matrici reali simmetriche congruenti possono avere autovalori diversi ma hanno lo stesso numero di autovalori positivi, negativi e nulli. La terna (t,r,s) data dai numeri di autovalori rispettivamente positivi, negativi e nulli di A si dice *segnatura* di A .
- Esiste sempre un cambiamento di base che porta una forma quadratica $\underline{x}^T A \underline{x}$ con A di segnatura (t,r,s) in $X_1^2 + \dots + X_t^2 - X_{t+1}^2 - \dots - X_{t+r}^2$.

Trasformazioni di un polinomio di secondo grado

Sia $f(\underline{x})=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ un polinomio di secondo grado nelle variabili x_1,x_2,\dots,x_n con coefficienti in \mathbb{R} , sia cioè

$$f(\underline{x})=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+\dots+a_{nn}x_n^2+2b_1x_1+2b_2x_2+\dots+2b_nx_n+c$$

Possiamo scrivere sempre $f(\underline{x})=\underline{x}^T A \underline{x}+2\underline{b}^T \underline{x}+c$, dove $\underline{x}=[x_1,x_2,\dots,x_n]^T$, A è la matrice reale simmetrica associata alla forma quadratica data dai termini di secondo grado di $f(\underline{x})$, $\underline{b}=[b_1,b_2,\dots,b_n]^T$ è il vettore $(n,1)$ formato dai coefficienti dei termini lineari di $f(\underline{x})$ divisi per 2, c è il termine noto.

✓ Siano U una matrice ortogonale di ordine n , e \underline{v} un vettore di tipo $(n,1)$, la trasformazione $\underline{x}=U\underline{X}+\underline{v}$ rappresenta una isometria da \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^n che trasforma il polinomio $f(\underline{x})$ nel polinomio $f'(\underline{X})=\underline{X}^T A' \underline{X}+2\underline{b}'^T \underline{X}+c'$ dove

- $A'=U^T A U$
 - $\underline{b}'=U^T(A\underline{v}+\underline{b})$
 - $c'=\underline{v}^T A \underline{v}+2\underline{b}^T \underline{v}+c$
- $f(U\underline{X}+\underline{v})=(U\underline{X}+\underline{v})^T A (U\underline{X}+\underline{v})+2\underline{b}^T (U\underline{X}+\underline{v})+c=\underline{X}^T U^T A U \underline{X}+\underline{v}^T A U \underline{X}+\underline{X}^T U^T A \underline{v}+\underline{v}^T A \underline{v}+2\underline{b}^T U \underline{X}+2\underline{b}^T \underline{v}+c$. Poiché $\underline{X}^T U^T A \underline{v}$ è una matrice di tipo $(1,1)$ coincide con la sua trasposta e dunque $\underline{X}^T U^T A \underline{v}=\underline{v}^T A U \underline{X}$ da cui $f(U\underline{X}+\underline{v})=f'(\underline{X})=\underline{X}^T U^T A U \underline{X}+2\underline{v}^T A U \underline{X}+\underline{v}^T A \underline{v}+2\underline{b}^T U \underline{X}+2\underline{b}^T \underline{v}+c=\underline{X}^T U^T A U \underline{X}+2(\underline{v}^T A +\underline{b}^T) U \underline{X}+\underline{v}^T A \underline{v}+2\underline{b}^T \underline{v}+c$

Trasformazioni di un polinomio di secondo grado

- Un polinomio di secondo grado in n variabili $f(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x} + 2\underline{b}^T \underline{x} + c$, può essere anche rappresentato dalla scrittura matriciale $f(\underline{z}) = \underline{z}^T B \underline{z}$, dove $\underline{z} = [x_1, x_2, \dots, x_n, 1]^T$ e $B = \left[\begin{array}{c|c} A & \underline{b} \\ \hline \underline{b}^T & c \end{array} \right]$
- La trasformazione corrispondente all'isometria $\underline{x} = U\underline{X} + \underline{v}$ è rappresentata da $\underline{z} = F\underline{Z}$, dove $F = \left[\begin{array}{c|c} U & \underline{v} \\ \hline \underline{0}^T & 1 \end{array} \right]$, $\underline{Z} = [X_1, X_2, \dots, X_n, 1]^T$.
- Si ha pertanto $f(\underline{Z}) = \underline{Z}^T B' \underline{Z}$ con $B' = F^T B F$.
- B' e B sono matrici congruenti ed inoltre $\det B' = \det B$.

Sommario

Abbiamo imparato:

- cosa è una forma quadratica;
- cosa è e come si determina il suo segno;
- cosa sono due matrici congruenti;
- come viene trasformato un polinomio di secondo grado da una isometria.