

# GEOMETRIA ED ALGEBRA LINEARE

## SOLUZIONI SECONDA PROVA IN ITINERE - 29/06/2011

**Esercizio 1.** (4 + 5 + 2 punti) Nello spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$  siano date le rette  $r$  ed  $s$  di equazioni parametriche  $r : x = t, y = 1 + t, z = 1$ , e  $s : x = q, y = 1, z = -q$ .

- (1) Discutere la loro posizione reciproca e determinare l'angolo che esse formano.
- (2) Determinare l'equazione cartesiana del piano contenente  $r$  e parallelo ad  $s$ , e determinare la distanza tra  $r$  ed  $s$ .
- (3) Determinare il massimo angolo che un piano contenente  $r$  forma con la retta  $s$ . Calcolare quindi l'equazione del piano contenente  $r$  che soddisfa tale condizione.

### Soluzione

(1) Le rette  $r$  ed  $s$  sono parallele, rispettivamente, ai vettori  $\vec{r} = [1, 1, 0]^t$  ed  $\vec{s} = [1, 0, -1]^t$ . Poiché i parametri direttori non sono proporzionali, le rette non sono parallele. Il punto  $R(0, 1, 1)$  appartiene ad  $r$ , il punto  $S(0, 1, 0)$  appartiene ad  $s$ . Il prodotto misto  $\langle \overrightarrow{RS}, \vec{r}, \vec{s} \rangle$  risulta

$$\langle \overrightarrow{RS}, \vec{r}, \vec{s} \rangle = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0,$$

per cui  $r, s$  sono rette sghembe. Abbiamo inoltre

$$\cos(\widehat{rs}) = \frac{\langle \vec{r}, \vec{s} \rangle}{\|\vec{r}\| \|\vec{s}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

e quindi  $\widehat{rs} = \pi/3$ .

(2) Il fascio di piani contenenti  $r$  ha equazione  $F_r : x - y + 1 + \lambda(z - 1) = 0$ . Il parallelismo con  $s$  si realizza imponendo che sia nullo il prodotto scalare  $\langle [1, -1, \lambda]^t, [1, 0, -1]^t \rangle$ , da cui  $\lambda = 1$ . Il piano richiesto ha quindi equazione  $x - y + z = 0$ . la distanza  $d(r, s)$  si può calcolare come distanza di un punto di  $s$ , per esempio  $S(0, 1, 0)$ , da tale piano, da cui

$$d(r, s) = \frac{|-1|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

In alternativa,  $d(r, s)$  si può anche ottenere dividendo  $|\langle \overrightarrow{RS}, \vec{r}, \vec{s} \rangle|$  per la radice quadrata della somma dei quadrati dei complementi algebrici delle componenti di  $\overrightarrow{RS}$ .

(3) Il seno dell'angolo formato con la retta  $s$  dal generico piano per  $r$  risulta

$$\sin(\widehat{F_r s}) = \frac{1 - \lambda}{\sqrt{2 + \lambda^2}\sqrt{2}}.$$

La derivata prima risulta

$$-\frac{\sqrt{2}(2 + \lambda)}{2(2 + \lambda^2)^{3/2}},$$

positiva per  $\lambda < -2$ . Quindi il massimo si ottiene per  $\lambda = -2$ , corrispondente al piano  $x - y - 2z + 3 = 0$ . Inoltre, per  $\lambda = -2$  si ha

$$\sin(\widehat{F_r s}) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

e quindi l'angolo massimo vale  $\pi/3$ . Il risultato si può anche dedurre geometricamente, essendo tale angolo uguale a quello formato dalle rette  $r, s$  considerate.

**Esercizio 2.** (6 + 4 + 1 punti) Nel piano euclideo  $\mathbb{R}^2$  sia dato il fascio di coniche di equazione

$$\mathcal{C}_k : kx^2 + 2(2 - k)xy + ky^2 - x - y + 1 - k = 0.$$

- (1) Posto  $k = 3$ , classificare la conica  $\mathcal{C}_3$  e determinarne una sua equazione canonica. Calcolare quindi le coordinate del suo centro e gli assi, oppure calcolare il cambio di riferimento che la riporta in forma canonica.
- (2) Determinare i valori di  $k$  per cui  $\mathcal{C}_k$  è una conica degenera e le coordinate dei punti base del fascio.
- (3) Calcolare poi i valori di  $k$  per cui  $\mathcal{C}_k$  è un'iperbole equilatera, e quelli per cui essa è una circonferenza.

### Soluzione

(1) Per  $k = 3$  l'equazione diventa  $3x^2 - 2xy + 3y^2 - x - y - 2 = 0$ . Calcolando gli invarianti abbiamo  $I_3 = -18$ ,  $I_2 = 8$ ,  $I_1 = 6$ , quindi la conica è un'ellisse reale. L'equazione caratteristica risulta  $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ , che fornisce gli autovalori  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 4$ . La forma canonica  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + I_3/I_2 = 0$  risulta quindi  $2x^2 + 4y^2 - 9/4 = 0$ . A  $\lambda_1 = 2$  corrisponde l'autospazio  $E_2 : x - y = 0$ , mentre a  $\lambda_2 = 4$  corrisponde l'autospazio  $E_4 : x + y = 0$ . Il sistema delle derivate parziali uguagliate a zero fornisce il centro  $C(1/4, 1/4)$ . Gli assi hanno quindi equazione  $y = x$  ed  $y = -x + 1/2$ . Il cambio di riferimento che porta la conica in forma canonica risulta

$$[x, y]^t = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} [x', y']^t + [1/4, 1/4]^t.$$

(2) Per  $k$  generico abbiamo  $I_3 = (1 - k)(4k - 3)$ , che si annulla per  $k = 1, 3/4$ . Inoltre, per  $k = \infty$  abbiamo la conica  $x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$  che si spezza nelle rette  $x - y - 1 = 0$  ed  $x - y + 1 = 0$ . I punti base si ottengono intersecando due qualsiasi coniche del fascio. Utilizziamo le coniche degeneri corrispondenti a  $k = 1$  e  $k = \infty$

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - x - y = 0 & (k = 1) \\ (x - y - 1)(x - y + 1) = 0 & (k = \infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x + y)(x + y - 1) = 0 \\ (x - y - 1)(x - y + 1) = 0. \end{cases}$$

Considerando i quattro sistemi lineari derivanti otteniamo

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y - 1 = 0. \end{cases} \Rightarrow A(1/2, -1/2),$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + 1 = 0. \end{cases} \Rightarrow B(-1/2, 1/2),$$

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0. \end{cases} \Rightarrow C(1, 0),$$

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0. \end{cases} \Rightarrow D(0, 1).$$

(3) L'invariante lineare è  $I_1 = 2k$ , e si annulla per  $k = 0$ . Poiché questo valore non corrisponde ad una conica degenera, la corrispondente conica è un'iperbole equilatera.

Per avere una circonferenza deve innanzitutto essere nullo il coefficiente del termine  $xy$ , il che avviene per  $k = 2$ . Per questo valore i coefficienti di  $x^2$  e di  $y^2$  sono uguali, e quindi, la conica corrispondente a  $k = 2$ , essendo non degenere, è una circonferenza.

**Esercizio 3.** (4 + 5 + 2 punti) Nello spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$  siano dati il punto  $F(0, 0, 1)$  ed il piano  $\alpha : x - y = 1$ .

- (1) Determinare l'equazione cartesiana del luogo  $S$  formato dai punti  $P \in \mathbb{R}^3$  che verificano la condizione

$$d(P, F) = \sqrt{2}d(P, \alpha)$$

e verificare che  $S$  è una quadrica.

- (2) Classificare  $S$ , calcolare una sua equazione canonica, e specificare se è una quadrica di rotazione.  
 (3) Determinare un piano che incontra  $S$  lungo una circonferenza, e calcolare l'equazione dell'eventuale asse di rotazione della quadrica.

### Soluzione

- (1) Detto  $P(x, y, z)$  il generico punto dello spazio, la condizione fornisce

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 1)^2} = \sqrt{2} \frac{|x - y - 1|}{\sqrt{2}},$$

da cui, elevando al quadrato e svolgendo i calcoli, otteniamo la quadrica  $S$  di equazione  $2xy + z^2 + 2x - 2y - 2z = 0$ .

- (2) La matrice associata ad  $S$  risulta

$$A_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il calcolo degli invarianti fornisce  $I_4 = -1$ ,  $I_3 = 1$ ,  $I_2 = -1$ ,  $I_1 = 1$ . L'equazione caratteristica  $-\lambda^3 + I_2\lambda - I_1\lambda^2 + I_3$  fornisce soluzioni  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = -1$ . La quadrica è quindi un iperboloido a due falde di rotazione. Essendo  $I_4/I_3 = 1$ , una forma canonica di  $S$  risulta  $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$ .

(3) Il sistema delle derivate parziali uguagliate a zero fornisce il centro  $C(1, -1, 1)$ . L'asse di rotazione è parallelo all'autospazio associato all'autovalore semplice e passa per  $C$ . Per  $\lambda = -1$  abbiamo l'autospazio  $E_{-1} = \{[x, -x, 0]^t, x \in \mathbb{R}\}$ . Quindi l'asse di rotazione ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + q \\ y = -1 - q \\ z = 1. \end{cases}$$

I piani che tagliano  $S$  secondo circonferenze devono essere ortogonali a questa retta (paralleli all'autospazio  $E_1$  associato all'autovalore doppio), quindi del tipo  $x - y + k = 0$ , e passare per punti dell'asse di rotazione collocati da parte opposta del centro rispetto ai vertici. Intersecando  $S$  con l'asse di rotazione otteniamo

$$\begin{cases} -2q^2 + 1 = 0 \\ x = 1 + q \\ y = -1 - q \\ z = 1, \end{cases}$$

da cui  $q = \pm 1/\sqrt{2}$ , corrispondente ai vertici. Per  $q < -1/\sqrt{2}$  e  $q > 1/\sqrt{2}$ , abbiamo punti dell'asse di rotazione per i quali passano piani  $x - y - 2q - 2 = 0$  che tagliano  $S$  secondo circonferenze