

Esercizio 1

Sia data la funzione lineare $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da: $T: (x, y, z, w) \rightarrow (x+2y-z+w, z+w)$.

- Calcolare le dimensioni di $\ker(T)$ e di $\text{Im}(T)$.
- Determinare una base ortonormale B_0 di $\ker(T)$.
- Completare la base B_0 a una base ortonormale di \mathbb{R}^4 .

Soluzione

a) La matrice associata a T è $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ed ha rango 2 per cui sia $\ker(T)$ sia di $\text{Im}(T)$ hanno dimensione 2.

b) $\ker(T)$ ha le seguenti equazioni cartesiane $\begin{cases} x+2y-z+w=0 \\ z+w=0 \end{cases}$ e quindi equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=-2k-2h \\ y=k \\ z=-h \\ w=h \end{cases}, \text{ una sua base è dunque } \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \text{ Con l'algoritmo di Gram Schmidt si}$$

ottiene una base ortogonale data da $\underline{b}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{5} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, da cui normalizzando

si trova la base ortonormale formata da $\underline{q}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{q}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{70}} \\ -\frac{4}{\sqrt{70}} \\ -\sqrt{\frac{5}{14}} \\ \sqrt{\frac{5}{14}} \end{bmatrix}$. Si poteva evitare di utilizzare

Gram Schmidt e cercare subito un vettore di $\ker(T)$ ortogonale a \underline{b}_1 , ponendo $-2(-2k-2h)+k=0$ da cui si ha $5k+4h=0$ e quindi $k=-\frac{4}{5}h$.

c) Si vede subito che il vettore $\underline{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ è ortogonale sia a \underline{q}_1 sia a \underline{q}_2 , aggiungiamo a tali vettori il vettore \underline{e}_1 otteniamo un insieme di vettori linearmente indipendenti, di cui i primi tre fra loro a

due a due ortogonali. Appliciamo Gram Schmidt e otteniamo $\underline{b}_4 = \underline{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\underline{q}_1 + \frac{2}{\sqrt{70}}\underline{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix}$.

Normalizzando \underline{b}_3 e \underline{b}_4 otteniamo la base ortonormale di \mathbb{R}^4 composta da $\underline{q}_1, \underline{q}_2, \underline{q}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$,

$$\underline{q}_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{7}} \\ \frac{2}{\sqrt{7}} \\ -\frac{1}{\sqrt{7}} \\ \frac{1}{\sqrt{7}} \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2

Trovare i valori del parametro reale h per cui la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ h+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ è simile alla matrice

$B = \text{diag}(1,1,2)$, dire se per tali valori A è ortogonalmente simile a B e, in caso positivo, determinare una matrice ortogonale U tale che $U^T A U = D$. In caso negativo, trovare, se esistono, valori di h per cui A è ortogonalmente diagonalizzabile e determinare la matrice D' a cui A è simile e la matrice ortogonale U tale che $U^T A U = D'$.

Soluzione

Due matrici simili hanno necessariamente lo stesso determinante, ora $\det B = 2$ e $\det A = 2(-2h-1)$, da cui risulta che l'unico valore per cui A e B possono essere simili è $h = -1$. Per tale valore di h sicuramente A non è ortogonalmente simile a B , in quanto B è diagonale ed A non è simmetrica. Vediamo se A è

simile a B . Si ha $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e gli autovalori di A sono 1 con molteplicità algebrica 2 e l'autovalore semplice 2. Si verifica facilmente che $\text{rk}(A-I) = 2$ per cui 1 non è regolare, A non è diagonalizzabile e quindi non è simile a B .

A è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se è simmetrica e quindi solo se $h = 1$. In tal caso abbiamo

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, il polinomio caratteristico di A è $(2-\lambda)[(1-\lambda)^2-4]$, da cui si ricava che gli autovalori di A

sono 2, -1, 3. Pertanto A è ortogonalmente simile a $\text{diag}(2, -1, 3)$. Per trovare U cerchiamo gli autovettori associati a tali autovalori. L'autospazio associato a 2 è formato dai vettori $[0, 0, h]^T$, quello associato a -1 è formato dai vettori $[k, -k, 0]^T$, quello associato a 3 è formato dai vettori $[p, p, 0]^T$. La matrice U si

ottiene quindi scegliendo versori di questi autospazi ed accostandoli. E' dunque $U = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Esercizio 3

Determinare i valori reali di h per cui la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & h-1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ è ortogonalmente diagonalizzabile.

Per tali valori di h riconoscere la conica di equazione $X^T A X = 0$ ove $X^T = [x, y, 1]$.

Soluzione

Per $h=0$ la matrice A è simmetrica e quindi ortogonalmente diagonalizzabile. La conica $X^TAX=0$ diventa, per $h=0$, $x^2-2xy+2=0$ ed è quindi un'iperbole con centro in O , asintoti $x=0$ e $x-2y=0$ ed assi di equazione $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}x$, $y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}x$.

Esercizio 4

Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 2a-1 & 1 \\ a & 0 & b \\ b & a & 0 \end{bmatrix}$.

Determinare i valori di a, b per cui A è ortogonalmente diagonalizzabile e per tali valori trovare la matrice diagonale D a cui A è simile e una matrice ortogonale U per cui $U^T A U = D$. Dire se A è simile

alla matrice $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Soluzione

A è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se è (reale e) simmetrica, pertanto i valori di a, b per cui

A è ortogonalmente diagonalizzabile sono le soluzioni (se esistono) del sistema $\begin{cases} 2a-1=a \\ b=1 \\ a=b \end{cases}$, ovvero

$a=b=1$.

Per tali valori si ha $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ il suo polinomio caratteristico è $-\lambda^3+3\lambda+2 = -\lambda^3-1+3\lambda+3 = -(\lambda+1)(\lambda^2-$

$\lambda+1)+3(\lambda+1) = (\lambda+1)(-\lambda^2+\lambda+2)$ e i suoi autovalori sono -1 con molteplicità algebrica 2 e 2 . L'autospazio di -1 è formato dai vettori $[-h-k, h, k]^T$, quello di 2 è formato dai vettori $[p, p, p]^T$. Dunque $D = \text{diag}(-1, -1, 2)$. Per trovare U servono due vettori non nulli e ortogonali nell'autospazio di -1 , ad esempio $[-1, 0, 1]^T$ e $[1, -2, 1]^T$. Tali vettori sono ortogonali ad un qualsiasi autovettore dell'autospazio di 2 , ad

esempio $[1, 1, 1]^T$. Normalizzando i tre vettori e accostandoli si ottiene $U = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$. La

matrice B non è diagonalizzabile n quanto l'autovalore -1 ha molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1 e quindi non è simile ad A .

Esercizio 5

Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalle condizioni seguenti

- $[1; 1; 0]^T$ è autovettore per f relativo all'autovalore -1 ;
- $[1; 0; 1]^T$ appartiene al nucleo di f ;
- $f([0; 1; 1]^T) = [2; 1; 1]^T$.

(1) Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alla base $B = \{[1; 1; 0]^T, [1; 0; 1]^T, [0; 1; 1]^T\}$.

(2) Trovare gli autovalori di f .

(3) Trovare una base per ogni autospazio.

(4) Stabilire se f è diagonalizzabile, motivando la risposta.

Soluzione

(1) Ovviamente si ha $f([1;1;0]^T) = [1;1;0]^T$, $f([1;0;1]^T) = [0;0;0]^T$; inoltre si vede subito che $f([0;1;1]^T) = [2;1;1]^T = [1;1;0]^T + [1;0;1]^T$, dunque la matrice che rappresenta f rispetto alla base B è

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (2) Ovviamente -1 e 0 sono autovalori di f , cerchiamo il terzo autovalore. Il polinomio caratteristico di A è $(-1-\lambda)\lambda^2$, quindi A (e dunque f) ammette l'autovalore 0 con molteplicità algebrica 2 .
- (3) L'autospazio relativo all'autovalore -1 ha dimensione 1 e quindi una sua base è $[1; 1; 0]^T$. La matrice A e quindi $(A-0I)$ ha rango 2 e quindi anche l'autospazio relativo all'autovalore 0 ha dimensione 1 ed una sua base è $[1; 0; 1]^T$.
- (4) f non è diagonalizzabile perché \mathbb{R}^3 non ha una base di autovettori.

Esercizio 6

Si considerino i sottospazi U, V di \mathbb{R}^4 generati nella maniera seguente

$U = L([1, 1, 1, 1]^T, [1, 0, 1, 0]^T)$; $V = L([1, -1, 1, -1]^T, [-1, 0, 1, 0]^T)$;

- (1) Dotato \mathbb{R}^4 del prodotto scalare canonico, determinare il sottospazio U^\perp ortogonale ad U , ed una sua base ortonormale.
- (2) Giustificare poi la seguente affermazione "Esistono vettori non nulli di U^\perp ortogonali a tutti i vettori di V ".

Soluzione

- (1) U ha dimensione 2 e quindi anche il sottospazio U^\perp ortogonale ad U ha dimensione 2 in quanto $\mathbb{R}^4 = U \oplus U^\perp$. U^\perp è formato da vettori che sono ortogonali a tutti i generatori di U , pertanto ha equazioni cartesiane $\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ x+z=0 \end{cases}$ ed equazioni parametriche $x=h, y=k, z=-h, w=-k$, pertanto i due vettori $[1, 0, -1, 0]^T, [0, 1, 0, -1]^T$ sono una base ortogonale di U^\perp e una base ortonormale è formata da $[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0]^T, [0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}]^T$.
- (2) Si verifica immediatamente che il vettore $[0, 1, 0, -1]^T$ che appartiene a U^\perp è ortogonale a tutti i generatori di V e quindi a tutti i vettori di V .

[]

Esercizio 7

Si consideri la matrice $M = \begin{bmatrix} a & a & 2b \\ 1 & 2 & b \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (con a, b parametri reali)

a. dire se per $a=0, b=1$ la matrice M è diagonalizzabile, in caso affermativo scrivere una matrice diagonale a cui risulta simile e una matrice che la diagonalizza,

b. determinare tutti i valori di a, b per cui M è ortogonalmente diagonalizzabile,

c. determinare a, b in modo che i vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ siano autovettori di M , per i valori trovati di

a, b , M è diagonalizzabile? E' anche ortogonalmente diagonalizzabile? In caso di risposta affermativa trovare una matrice ortogonale che diagonalizzi M .

Soluzione

a. Per $a=0, b=1$ si ha $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, il polinomio caratteristico di M è $\lambda^2(2-\lambda)+2-4(2-\lambda)+\lambda=(2-\lambda)(\lambda^2-$

$4)+(\lambda+2)=(\lambda+2)[-(2-\lambda)^2+1]$, da cui gli autovalori di M sono $-2, 1, 3$ ed essendo distinti M è diagonalizzabile simile a $\text{diag}(-2, 1, 3)$. Un autovettore dell'autospazio di -2 è $[1, 0, -1]^T$, un

autovettore relativo all'autovalore 1 è $[2, -3, 1]^T$, un autovettore relativo all'autovalore 3 è $[2, 5, 3]^T$ e dunque una matrice che diagonalizza M portandola alla forma $\text{diag}(-2, 1, 3)$ è $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

- b. M è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se è (reale e) simmetrica quindi quando $a=1, b=1$.
c. I tre vettori dati sono una base di \mathbb{R}^3 e quindi affinché siano autovettori di M , M deve essere resa

diagonale dalla matrice $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Si ha $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ da cui

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} a-3 & a & 3b \\ a+3 & a+3 & 3b \\ a & a-3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} a-3b-3 & 2a+3b-3 & -3 \\ a-3b+3 & 2a+3b+6 & 0 \\ a & 2a-3 & 3 \end{bmatrix} \text{ e non c'è modo di}$$

rendere questa matrice diagonale, per cui non si possono scegliere a, b in modo che i tre vettori dati siano autovalori di M .

Si poteva procedere direttamente cercando h, k, p tali che $\begin{bmatrix} a & a & 2b \\ 1 & 2 & b \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} a & a & 2b \\ 1 & 2 & b \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & a & 2b \\ 1 & 2 & b \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ da cui } a-2b=h, 1-b=0, 2=-h, \text{ e quindi } b=1, a=0, \text{ ma}$$

abbiamo già visto che per $a=0, b=1$ gli altri autovalori della matrice sono 1 e 3 e gli autospazi sono $V(1) = \{t[2, -3, 1]^T | t \in \mathbb{R}\}$, $V(3) = \{s[2, 5, 3]^T | s \in \mathbb{R}\}$ e i due vettori $[1, 1, 1]^T, [1, -1, 0]^T$ non appartengono a tali autospazi.

Esercizio 8

Si consideri l'endomorfismo $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito come

$$T([x, y, z]^T) = [5x + 2y - 2z, 2x + 2y + 4z, -2x + 4y + 2z]^T$$

essendo \mathbb{R}^3 dotato del prodotto scalare canonico.

- (1) Verificare che T è un endomorfismo simmetrico.
- (2) Dopo aver verificato che $[0, 1, 1]^T$ è autovettore per T ; calcolare gli autovalori di T ed una base per ogni suo autospazio.
- (3) Detta A una matrice simmetrica associata a T ; esibire una matrice ortogonale P che diagonalizza ortogonalmente A .

Soluzione

- (1) La matrice associata a T (rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3) è $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ ed è simmetrica,

quindi T è un endomorfismo simmetrico (in quanto la base canonica è ortonormale).

- (2) $T([0, 1, 1]^T) = [0, 6, 6] = 6[0, 1, 1]^T$ e dunque è un autovettore di T associato all'autovalore 6. Il polinomio caratteristico di A è $(5-\lambda)(2-\lambda)^2 - 32 - 8(2-\lambda) - 16(5-\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 108 = -(\lambda-6)(\lambda^2 - 3\lambda - 18)$. Gli autovalori di A sono dunque 6 con molteplicità algebrica 2 e -3 con molteplicità algebrica 1. L'autospazio $V(6)$ associato all'autovalore 6 è $\{[2h-2k, h, k]^T | h, k \in \mathbb{R}\}$ ed una sua base è quindi $\{[2, 1, 0]^T, [-2, 0, 1]^T\}$, l'autospazio $V(-3)$ associato all'autovalore -3 è $\{[t, -2t, 2t]^T | t \in \mathbb{R}\}$ ed una sua base è quindi $\{[1, -2, 2]^T\}$.

(3) Cerchiamo una base ortogonale di $V(6)$: prendiamo $\underline{b}_1 = [2, 1, 0]^T$, $\underline{b}_2 = [-2, 0, 1]^T + \frac{4}{5}[2, 1, 0]^T = [-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1]^T$,

una base ortonormale di $V(6)$ è allora $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{bmatrix} \right\}$. Questi vettori sono tutti ortogonali ai vettori

di $V(-3)$, Un versore di $V(-3)$ è, $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ e quindi la matrice P richiesta è $\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

Esercizio 9

Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare data da $f([x, y, z]^T) = [x+3y-z, 3x+y+3z]^T$

Sia U il piano di equazione $x - y = 0$. Determinare la proiezione ortogonale della retta $\ker f$ sul piano U e l'angolo che la retta $\ker f$ forma con tale proiezione.

Soluzione

La retta $\ker f$ ha equazioni $\begin{cases} x+3y-z=0 \\ 3x+y+3z=0 \end{cases}$. Possiamo allora scrivere il piano del fascio che ha per

sostegno la retta $\ker f$ ed è ortogonale ad U e la proiezione cercata è l'intersezione di U con tale piano.

Il generico piano del fascio che ha per sostegno la retta $\ker f$ ha equazione $\lambda(x+3y-z) + \mu(3x+y+3z) = 0$

ed ha parametri direttori $(\lambda+3\mu, 3\lambda+\mu, -\lambda+3\mu)$ e per trovare il piano perpendicolare ad U devo porre

$(\lambda+3\mu) - (3\lambda+\mu) = 0$ da cui trovo $\lambda = \mu$, quindi il piano cercato è $2x+2y+z=0$ e la proiezione della retta è

$\begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$. I parametri direttori di questa retta sono $(1, 1, -4)$, i parametri direttori della retta $\ker f$

sono $(10, -6, -8)$, l'angolo formato dalle due rette è $\arccos \frac{36}{\sqrt{18}\sqrt{200}} = \arccos 3/5$.

Usando l'algebra delle matrici cerchiamo abbiamo $\ker f = \{[10t, -6t, -8t]^T | t \in \mathbb{R}\}$. Essendo

$U = \{[h, h, k]^T | h, k \in \mathbb{R}\}$ i vettori $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sono una base ortonormale di U , Quindi la matrice proiezione su

U è la matrice $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. La proiezione ortogonale di $\ker f$ su U è allora

$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10t \\ -6t \\ -8t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ 2t \\ -8t \end{bmatrix}$. L'angolo che la retta $\ker f$ forma con la proiezione è l'angolo fra i vettori

$[5, -3, -4]^T$ che è una base di $\ker f$ e $[1, 1, -4]^T$ che è una base della proiezione ortogonale di $\ker f$ su U e ovviamente si ha ancora che tale angolo è $\arccos 3/5$.

Esercizio 10

Sia dato il sottospazio $U = L([1; 1; 1]^T; [1; 2; 2]^T)$ di \mathbb{R}^3

- (a) Scrivere l'endomorfismo f di \mathbb{R}^3 che rappresenta la simmetria ortogonale rispetto ad U ; calcolando la matrice P ad esso associata rispetto alla base canonica.
- (b) Verificare che P è una matrice sia ortogonale, sia simmetrica e determinare una base ortonormale di \mathbb{R}^3 formata da autovettori di f .

Soluzione

- (a) U in \mathbb{R}^3 rappresenta un piano di equazioni parametriche $\begin{cases} x=h+k \\ y=h+2k \\ z=h+2k \end{cases}$ e quindi di equazione cartesiana

$y=z$. La simmetria ortogonale rispetto ad U manda quindi un punto P di coordinate (x,y,z) in un punto P' di coordinate (x',y',z') che appartenga alla retta per P perpendicolare al piano $y=z$ e tale che il punto medio di PP' stia sul piano $y=z$, abbiamo quindi $x'=x$, $y'=y+t$, $z'=z-t$ ed inoltre

$y'+y=z'+z$. Da cui ricaviamo che la simmetria ortogonale cercata ha equazioni $\begin{cases} x'=x \\ y'=z \\ z'=y \end{cases}$ e quindi

matrice associata $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Osservate che abbiamo anche una formuletta per calcolare questa matrice che risulta essere $P=I-2Q$ dove Q è la matrice proiezione su U^\perp . U^\perp ha dimensione 1 in quanto \mathbb{R}^3 è somma diretta di U ed U^\perp .

Ovviamente possiamo facilmente trovare U^\perp o facendo il prodotto vettoriale dei generatori di U o cercando un generico vettore (x,y,z) ortogonale ad entrambi i generatori di U . In questo ultimo modo

troviamo che U^\perp ha equazioni cartesiane $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+2z=0 \end{cases}$ ed ha quindi come base il vettore $[0,1,-1]^T$. La

matrice proiezione su U^\perp è dunque $Q = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ e quindi la matrice

della simmetria ortogonale è $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

- (b) E' evidente che P è simmetrica, è inoltre ortogonale perché le sue colonne sono vettori di norma 1 a due a due ortogonali. Il polinomio caratteristico di Q è $(1-\lambda)(\lambda^2-1)$, gli autovalori sono quindi 1 con molteplicità algebrica 2 e -1 con molteplicità algebrica 1, come potevamo già dire in quanto P è ortogonale e simmetrica e quindi ha autovalori reali che sono 1 e -1 ed inoltre essendo una simmetria ortogonale rispetto a un piano tiene fermi i vettori del piano e quindi l'autovalore 1 ha molteplicità geometrica 2 e di conseguenza anche molteplicità algebrica 2. Una base ortonormale di autovettori di P è quindi formata dal versore che ha direzione ortogonale ad U e che possiamo ottenere normalizzando $[0,1,-1]^T$ e da due vettori ortonormali di U . Un vettore di norma 1 di U è $[1,0,0]^T$, un vettore non nullo ortogonale a questo e appartenente ad U deve essere della forma $[0,h,h]^T$ con $h \neq 0$, quindi una base ortonormale di \mathbb{R}^3 formata da autovettori di P è

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\}.$$