

GEOMETRIA ED ALGEBRA LINEARE

Prova d' esame - 18/07/2012 - Versione A

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 1. (11 punti) Sia $V = \mathbb{R}^3$ e si consideri la sua base $B = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1))$. Sia poi data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

e sia $f : V \rightarrow V$ l' endomorfismo definito da $M_{B,B}(f) = A$.

- (1) Calcolare gli autovalori di f .
- (2) Calcolare una base per ogni autospazio di f , ed una matrice invertibile P , se esiste, che diagonalizza A .
- (3) Usando poi il prodotto scalare standard di V , determinare un vettore \vec{u} non nullo di \mathbb{R}^3 tale che l' angolo tra \vec{u} e $f(\vec{u})$ sia ottuso. Ne esiste anche uno non nullo \vec{v} tale che l' angolo tra \vec{v} e $f(\vec{v})$ sia retto?

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di f è $p(t) = \det(A - tI) = (1 - t)[(-t)(-1 - t) - 2] = -(t - 1)^2(t + 2)$. Essendo le sue radici reali, gli autovalori di f sono $t_1 = 1$ e $t_2 = -2$ di molteplicità $m(1) = 2, m(-2) = 1$, rispettivamente.

Calcoliamo ora l' autospazio $V(1)$: i vettori \vec{v} che appartengono a tale autospazio hanno componenti $[\vec{v}]_B = {}^t(a, b, c)$ che risolvono il sistema lineare omogeneo avente

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

come matrice dei coefficienti delle incognite. Effettuando l' operazione elementare $R_3 + 2R_2 \rightarrow R_3$ si ottiene una matrice ridotta per righe di rango 1, e quindi $\dim(V(1)) = 3 - 1 = 2 = m(1)$. Sia $B_1 = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ una base di $V(1)$. L' unica equazione da risolvere è $a - b + c = 0$ e quindi $b = a + c$. Le componenti dei vettori \vec{v}_1, \vec{v}_2 di B_1 sono, ad esempio, $[\vec{v}_1]_B = {}^t(1, 1, 0)$ e $[\vec{v}_2]_B = {}^t(0, 1, 1)$. Con facili calcoli si ottiene che $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$ e $\vec{v}_2 = (1, 2, 1)$.

Con procedimento analogo, si ha che $V(-2)$ ha dimensione 1, e, detta $B_{-2} = (\vec{v}_3)$ una sua base, le componenti di \vec{v}_3 sono $[\vec{v}_3]_B = {}^t(0, 1, -2)$. In conclusione, $\vec{v}_3 = (-2, -1, -2)$.

Essendo le radici di $p(t)$ tutte reali, ed avendo gli autospazi dimensione uguale alla molteplicità dell' autovalore relativo, f è diagonalizzabile, $E = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ è una base di V di autovettori per f , ed una matrice P che diagonalizza A è

$$P = M_{E,B}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo il vettore $\vec{w} = \vec{v}_3 + t \vec{v}$ dove $\vec{v} = (1, 0, -1) \in V(1)$ è ortogonale a \vec{v}_3 . Usando la linearità di f , si ha che $f(\vec{w}) = -2 \vec{v}_3 + t \vec{v}$, e quindi $\vec{w} \cdot f(\vec{w}) = -2 \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_3 - t \vec{v} \cdot \vec{v}_3 + t^2 \vec{v} \cdot \vec{v} = -18 + 2t^2$. Se $2t^2 - 18 < 0$, ossia $-3 < t < 3$, l' angolo tra \vec{w} e la sua immagine è ottuso, mentre se $t = 3$ oppure $t = -3$, \vec{w} è ortogonale alla sua immagine.

Esercizio 2. (11 punti) In \mathbb{R}^4 , siano dati i sottospazi

$$V = L((1, 0, -1, 0), (0, -1, 2, 1))$$

e

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z = 0, z - t = 0\}$$

e siano $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ e $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ applicazioni lineari tali che $V = \text{Im}(f)$ e $W = \ker(g)$.

- (1) Determinare una base di $V \cap W$ e la sua dimensione.
- (2) Costruire un esempio esplicito di f e g in modo che $\ker(f \circ g) = W$.
- (3) Calcolare $\dim \ker(g \circ f)$ e dedurre che $g \circ f$ ha un autovalore di molteplicità almeno 3.

Svolgimento. I vettori di V sono della forma $a(1, 0, -1, 0) + b(0, -1, 2, 1) = (a, -b, -a + 2b, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Sostituendo tale vettore nel sistema che definisce W , otteniamo il nuovo sistema lineare $a - b = 0$ essendo la prima equazione identicamente soddisfatta. Abbiamo che le soluzioni sono infinite e tutte verificano $a = b$. Quindi, $V \cap W$ ha dimensione 1 ed una sua base è $B = ((1, -1, 1, 1))$.

Il sottospazio W ha base $B_W = ((-2, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 1))$ che si ottiene con facili calcoli risolvendo il sistema che definisce W . Una base di \mathbb{R}^4 che completa la base di W è, ad esempio, $B = ((-2, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1))$. Definiamo g ponendo

$$g(-2, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0), g(-1, 0, 1, 1) = (0, 0, 0, 0),$$

$$g(1, 0, 0, 0) = (1, 0, 0, 0), g(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 1).$$

È evidente che $\text{Im}(g) = L((1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1))$. Definiamo ora f ponendo

$$f(1, 0, 0, 0) = (0, -1, 2, 1), f(0, 0, 0, 1) = (1, 0, -1, 0),$$

$$f(0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0), f(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 0).$$

La composizione delle due applicazioni si calcola facilmente, ed abbiamo

$$(f \circ g)(-2, 1, 0, 0) = (f \circ g)(-1, 0, 1, 1) = (0, 0, 0, 0),$$

$$(f \circ g)(1, 0, 0, 0) = (0, -1, 2, 1), (f \circ g)(0, 0, 0, 1) = (1, 0, -1, 0)$$

ed è quindi evidente che $\ker(f \circ g) = W$ mentre $\text{Im}(f \circ g) = V$.

Dal teorema del rango, sappiamo che $\dim(V) = \dim(\ker(g \circ f)) + \dim(\text{Im}(g \circ f))$. Dalla definizione di applicazione composta, sappiamo che $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(G)$ dove $G : \text{Im}(f) \rightarrow V$ è la restrizione di g a $\text{im}(f)$. Il nucleo di G è $\text{Im}(f) \cap \ker(g) = V \cap W$ e quindi $\dim(\text{Im}(G)) = \dim(\text{Im}(f) = V) - \dim(V \cap W) = 1$. In conclusione, $\dim(\ker(g \circ f)) = 3$, e quindi $g \circ f$ ha l'autovalore 0 con autospazio $V(0)$ di dimensione 3. Ne risulta che $m(0) \geq 3$.

Esercizio 3. (11 punti) Sia dato il piano $\alpha : x - y - 1 = 0$, e sia Q la quadrica formata dai punti P che verificano

$$d(P, r) = \sqrt{\frac{2}{3}} d(P, \alpha)$$

dove r è l'asse x .

- (1) Classificare Q dopo averne calcolato l'equazione.
- (2) Trovare una forma canonica della conica $Q \cap [yz]$ essendo $[yz]$ il piano coordinato che contiene gli assi y ed z , ed il relativo cambio di coordinate.

Svolgimento. Sia $P(x, y, z)$ un punto. La distanza di P dall'asse x è $d(P, r) = \sqrt{y^2 + z^2}$ visto che la proiezione ortogonale di P su tale retta ha coordinate $(x, 0, 0)$. La distanza di P dal piano α è uguale a $d(P, \alpha) = |x - y - 1|/\sqrt{2}$. Sostituendo nella relazione che definisce Q , elevando al quadrato e semplificando, otteniamo l'equazione

$$Q : x^2 - 2xy - 2y^2 - 3z^2 - 2x + 2y + 1 = 0.$$

Le matrici associate a Q sono

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Effettuando le operazioni elementari $R_2 + R_1 \rightarrow R_2, R_4 + R_1 \rightarrow R_4$ sulle righe di B si ottiene una matrice ridotta con l'ultima riga nulla. Quindi, $r(B) = 3$ ossia Q è una quadrica singolare. Il polinomio caratteristico di A è $p(t) = (-3 - t)(t^2 + t - 3)$ e quindi A ha due autovalori negativi ed uno positivo. Di conseguenza, Q è un cono reale.

La conica $\Gamma = Q \cap [yz]$ ha equazione $x = 0, 2y^2 + 3z^2 - 2y - 1 = 0$. La matrice completa della conica è

$$B' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ed ha determinante $\det(B') = -9$. Quindi Γ è non degenere. In particolare, è un'ellisse, essendo gli autovalori di A' uguali a 2 e 3. Una sua forma canonica è

$$2Y^2 + 3Z^2 - \frac{9}{6} = 0$$

ed avendo Γ centro di simmetria in $(\frac{1}{2}, 0)$ il cambio di coordinate che la riporta in forma canonica è

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

GEOMETRIA ED ALGEBRA LINEARE

Prova d' esame - 18/07/2012 - Versione B

Tutti i calcoli devono essere riportati per la correzione, e le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 4. (11 punti) Sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia $B = ((1, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ una sua base. Sia poi data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia $f : V \rightarrow V$ l' endomorfismo definito da $M_{B,B}(f) = A$.

- (1) Calcolare gli autovalori di f .
- (2) Calcolare una base per ogni autospazio di f , ed una matrice invertibile P , se esiste, che diagonalizza A .
- (3) Usando poi il prodotto scalare standard di V , determinare un vettore \vec{u} non nullo di \mathbb{R}^3 tale che l' angolo tra \vec{u} e $f(\vec{u})$ sia ottuso. Ne esiste anche uno non nullo \vec{v} tale che l' angolo tra \vec{v} e $f(\vec{v})$ sia retto?

Esercizio 5. (11 punti) In \mathbb{R}^4 , siano dati i sottospazi

$$V = L((0, 1, -1, 0), (-1, 0, 2, 1))$$

e

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y + z = 0, z - t = 0\}$$

e siano $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ e $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ applicazioni lineari tali che $V = \text{Im}(f)$ e $W = \text{ker}(g)$.

- (1) Determinare una base di $V \cap W$ e la sua dimensione.
- (2) Costruire un esempio esplicito di f e g in modo che $\text{ker}(f \circ g) = W$.
- (3) Calcolare $\dim \text{ker}(g \circ f)$ e dedurre che $g \circ f$ ha un autovalore di molteplicità almeno 3.

Esercizio 6. (11 punti) Sia dato il piano $\alpha : x - y - 1 = 0$, e sia Q la quadrica formata dai punti P che verificano

$$d(P, r) = \sqrt{\frac{2}{3}} d(P, \alpha)$$

dove r è l' asse y .

- (1) Classificare Q dopo averne calcolato l' equazione.
- (2) Trovare una forma canonica della conica $Q \cap [xz]$ essendo $[xz]$ il piano coordinato che contiene gli assi x ed z , ed il relativo cambio di coordinate.