Equazioni cartesiane di una retta nello spazio

- Eliminando il parametro dalle equazioni parametriche di una retta si trova un sistema di due equazioni lineari nelle variabili x,y,z, quindi la retta viene rappresentata come intersezione di due piani. Viceversa se abbiamo un sistema formato dalle equazioni di due piani non paralleli, questo sistema rappresenta una retta.

➢ Un sistema $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$ rappresenta una retta se e solo se i due vettori $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$ non sono paralleli.

➢ Data una retta in equazioni cartesiane, i suoi parametri direttori si possono trovare riscrivendone le equazioni parametriche, oppure tenendo conto che il vettore direzione della retta è ortogonale alle direzioni delle normali ai piani che la individuano e pertanto è $(b_1c_2-b_2c_1, c_1a_2-c_2a_1, a_1b_2-a_2b_1)$.

Fasci di piani

Dati due piani π_1 e π_2 distinti di equazioni rispettivamente $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, si chiama *fascio di piani individuato da* π_1 e π_2 l'insieme di tutti e soli i piani di equazione

$$\lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1)+\mu(a_2x + b_2y + c_2z + d_2)=0$$

con λ e μ parametri reali.

- Se π_1 e π_2 sono non paralleli fra loro, i piani del fascio da essi individuato sono tutti e soli i piani che contengono la retta r di equazioni $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$. Il fascio si chiama allora *fascio proprio di piani di sostegno* r.
- Se π_1 e π_2 sono paralleli, i piani del fascio da essi individuato sono tutti e soli i piani paralleli a π_1. Il fascio si chiama allora *fascio improprio di piani* individuato da π_1.
- L' equazione $\lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1)+\mu(a_2x + b_2y + c_2z + d_2)=0$ di un fascio di piani si potrebbe scrivere nella forma
$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + t(a_2x + b_2y + c_2z + d_2)=0$$
utilizzando il solo parametro $t=\frac{\mu}{\lambda}$, ma questo implica $\lambda\neq0$ e quindi viene perso il piano di equazione $a_2x + b_2y + c_2z + d_2=0$

Punto medio di un segmento

- Siano A=(x_1,y_1,z_1) e B=(x_2,y_2,z_2) due punti dello spazio. Vogliamo trovare le coordinate del punto medio M del segmento di estremi A e B.
  - Il vettore $\overrightarrow{AM}$ è parallelo al vettore $\overrightarrow{AB}$
  - $\|\overrightarrow{AM}\|=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|$
  - $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$
  - Quindi $\overrightarrow{AM} = \begin{bmatrix} \frac{x_2 - x_1}{2} \\ \frac{y_2 - y_1}{2} \\ \frac{z_2 - z_1}{2} \end{bmatrix}$

➢ Le coordinate di M sono $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

Distanza di un punto da un piano

- Siano $A=(x_0,y_0,z_0)$ e π: $ax+by+cz+d=0$. Vogliamo calcolare la distanza $d(A,\pi)$ di A da π.
  - Sia $P = (x_1,y_1,z_1)$ un punto del piano π, cioè sia $ax_1+by_1+cz_1+d=0$.
  - $d(A,\pi)$ è il minimo di dist(A,P) al variare di P su π. Quindi $d(A,\pi)$ = dist(A,B) dove B è il piede della perpendicolare condotta da A su π. Ne segue che $d(A,\pi)$ è il modulo del vettore proiezione del vettore $\overrightarrow{PA}$ nella direzione del vettore $\underline{n}$ normale al piano.
  - Detto θ l'angolo fra $\overrightarrow{PA}$ ed $\underline{n}$ il vettore proiezione del vettore $\overrightarrow{PA}$ nella direzione del vettore $\underline{n}$ è $\left\|\overrightarrow{PA}\right\| \cos\theta \frac{\underline{n}}{\|\underline{n}\|} = \frac{|\overrightarrow{PA}\cdot\underline{n}|}{\|\underline{n}\|}\frac{\underline{n}}{\|\underline{n}\|}$ il cui modulo è $\frac{|\overrightarrow{PA}\cdot\underline{n}|}{\|\underline{n}\|}$.
  - $\underline{n}=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{PA} = \begin{bmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \\ z_0 - z_1 \end{bmatrix}$, $d(A,\pi)=\frac{|\overrightarrow{PA}\cdot\underline{n}|}{\|\underline{n}\|}$.

➢ $d(A,\pi)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Distanza di un punto da una retta

- Siano $A=(x_0,y_0,z_0)$ ed r una retta per $P=(x_1,y_1,z_1)$ con parametri direttori (a,b,c). Vogliamo calcolare la distanza d(A,r) di A da r.
  - d(A,r) è il minimo di dist(A,Q) al variare di Q su r. Quindi d(A,r) =dist(A,B) dove B è il punto di intersezione fra la retta r ed il piano per A perpendicolare ad r.
  - Sia $\underline{r}=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ il vettore direzione di r.
  - Detto θ l'angolo $\widehat{BPA}$, si ha quindi $d(A,r)=\left\|\overrightarrow{BA}\right\|=\left\|\overrightarrow{PA}\right\| \sin\theta = \frac{\left\|\overrightarrow{PA}\times\underline{r}\right\|}{\|\underline{r}\|}$.
  - d(A,r) è anche il modulo del vettore differenza fra $\overrightarrow{PA}$ e il vettore proiezione ortogonale di $\overrightarrow{PA}$ sulla direzione di r, dunque $d(A,r)=\left\|\overrightarrow{PA} - \frac{\overrightarrow{PA}\cdot r}{\|\underline{r}\|}\,\underline{r}\right\|$.
- Osservate che se lavoriamo nel piano dati il punto $A=(x_0,y_0)$ e la retta r: ax+by+c=0 (dove A ed r sono implicitamente nel piano z=0) allora $d(A,r)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Distanza fra due rette

- Siano r ed s due rette nello spazio la distanza d(r,s) di queste due rette è il minimo di dist(R,S) al variare di R ed S rispettivamente su r e su s.
  - Sappiamo che nello spazio due rette sono o incidenti o parallele o sghembe
  - Se r, s sono incidenti, d(r,s)=0
  - Se r, s sono parallele, preso arbitrariamente un punto R di r si ha d(r,s)=d(R,s)
  - Se r,s sono sghembe d(r,s) è la distanza fra due punti P e Q tali che la retta PQ sia perpendicolare ed incidente ad r e ad s, ovvero incidente ad r e ad s e parallela al vettore prodotto vettoriale $\underline{n}$ delle direzioni di r e di s. In altre parole d(r,s) è il modulo del vettore proiezione ortogonale nella direzione di $\underline{n}$ del vettore $\overrightarrow{RS}$ dove R ed S sono punti arbitrari rispettivamente di r ed s , quindi, detti $\underline{r}$, $\underline{s}$ i vettori direzione di r ed s rispettivamente (cioè le loro terne di parametri direttori), si ha d(r,s)=$\frac{|\overrightarrow{RS}\cdot(\underline{r}\times\underline{s})|}{\|\underline{r}\times\underline{s}\|}$.

Posizione reciproca di due rette nello spazio

- Date le equazioni (parametriche o cartesiane) di due rette r,s nello spazio per decidere la loro reciproca posizione:
  1. calcoliamo i parametri direttori di r ed s,
  2. se sono due terne proporzionali concludiamo che le rette sono parallele,
  3. se questo non accade scriviamo il sistema formato dalle equazioni di r e da quelle di s e verifichiamo se tale sistema ammette soluzione. Se ha soluzione le rette sono incidenti, se no sono sghembe.

  Attenzione: SIe equazioni di entrambe le rette r ed s sono date in forma parametrica bisogna che il parametro di r non sia uguale a quello di s e quindi prima di cercare di risolvere il sistema fra le equazioni bisogna, in caso, cambiare nome ad uno dei parametri .

  - Per chiarire la situazione, quando scriviamo una retta in forma parametrica nel parametro t è come se rappresentassimo le coordinate di un punto che si muove su una traiettoria rettilinea al variare del tempo t. Se facciamo il sistema delle equazione parametriche di due rette r ed s, entrambe scritte in funzione di uno stesso parametro t, il sistema ammette soluzione se e solo esiste un istante in cui i due punti sono nella stessa posizione. Le due rette sono incidenti invece se e solo se esistono due istanti t_1 e t_2 tali che nell'istante t_2 il punto sulla seconda retta si trova nella stessa posizione in cui si trova il punto sulla prima retta nell'istante t_1.

Sommario

Nella lezione 2 e in questa parte della lezione 3 abbiamo imparato:

- come scrivere le equazioni parametriche e cartesiane di rette e piani;
- cosa sono i parametri direttori di rette e piani e come si calcolano dalle loro equazioni;
- Le condizioni di parallelismo e perpendicolarità fra rette, fra piani e fra piani e rette;
- cosa sono i fasci di piani;
- come calcolare le distanze fra due punti, fra un punto e un piano, fra un punto e una retta, fra due rette;
- come determinare la reciproca posizione di due rette nello spazio.

Sistemi lineari

- Una *equazione lineare* a coefficienti in K nelle n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ è un'equazione del tipo $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b$, ove $a_1, a_2, \ldots a_n, b \in K$.
- Una *soluzione* (non n soluzioni!!) dell'equazione è una n-upla $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ di elementi di K (cioè un vettore in K^n) tale che $a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\ldots+a_n\alpha_n=b$.
- Un *sistema lineare di* m *equazioni in* n *incognite* a coefficienti in K è un insieme di m equazioni lineari nelle n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- Si dice *soluzione del sistema lineare* una n-upla di elementi di K che sia soluzione di tutte le equazioni del sistema, ammesso che tale n-upla esista.

Sistemi lineari

- Un sistema lineare che non ammette soluzioni si dice *impossibile*, un sistema *possibile* ha sempre soluzioni ed è detto *determinato* se ammette una ed una sola soluzione (che è una n-upla di elementi di K!) altrimenti è detto *indeterminato*.
- Un sistema lineare si dice *omogeneo* se i termini noti di tutte le equazioni del sistema sono uguali a 0.
  - Un sistema lineare omogeneo è sempre possibile in quanto ha sempre la soluzione $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$, detta *soluzione banale*.
  - Per i sistemi lineari omogenei siamo interessati a trovare, se esistono, soluzioni non banali dette *autosoluzioni* del sistema.

Sistemi lineari

Il sistema
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

può sempre essere scritto nella forma

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

pertanto è possibile se e solo se il vettore $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ è combinazione lineare dei vettori

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

In particolare un sistema omogeneo ha autosoluzioni se e solo se questi ultimi vettori sono linearmente dipendenti

Sistemi equivalenti

- Due sistemi lineari S_1 ed S_2 sul campo K si dicono *equivalenti* se tutte e sole le soluzioni di S_1 sono anche soluzioni di S_2 (ovviamente questo implica che tutte e sole le soluzioni di S_2 siano anche soluzioni di S_1).

- Dato un sistema S il sistema S' ottenuto da S facendo una sequenza qualsiasi delle seguenti operazioni:
  - scambiare fra loro due equazioni;
  - moltiplicare entrambi i membri di una equazione per un parametro $k \in K$ e diverso da 0;
  - sommare membro a membro ad una equazione una delle restanti equazioni

  è equivalente ad S.

Sommario

Abbiamo imparato:

- cos’è un sistema lineare;
- cos’è una sua soluzione;
- cosa significa che un sistema lineare è impossibile, possibile, determinato e indeterminato;
- cos’è un sistema lineare omogeneo;
- cosa sono le sue autosoluzioni;
- una c.n.s affinché un sistema lineare sia possibile e una c.n.s affinché un sistema lineare omogeneo ammetta autosoluzioni;
- quando due sistemi lineari sono equivalenti.