

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE		
Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Appello 30 Aprile 2015		
Cognome:	Nome:	Matricola:

Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.

a. Fissato un sistema di riferimento, si considerino le due rette

$$r : \begin{cases} hx - y + 1 = 0 \\ (h - 1)x - y + z = 0 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} -y + z = 0 \\ 2x - y - z - 2h + 2 = 0 \end{cases}$$

1. Studiare la mutua posizione di r ed s al variare del parametro reale h .
2. Per i valori di h per cui le rette sono incidenti, trovare il punto di intersezione.
3. Verificato che per $h = -1$ le rette sono sghembe, trovare l'equazione cartesiana del piano contenente s e parallelo ad r .

Soluzione

1. Soluzione 1.

Le equazioni parametriche delle rette r ed s sono rispettivamente

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = ht + 1 \\ z = t + 1 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x = s + h - 1 \\ y = s \\ z = s \end{cases}$$

Pertanto i parametri direttori di r sono $1, h, 1$, quelli di s sono $1, 1, 1$, dunque le due rette sono parallele se e solo se $h = 1$. Le due rette sono incidenti se e solo se il sistema

$$\begin{cases} t = s + h - 1 \\ ht + 1 = s \\ t + 1 = s \end{cases}$$

è possibile e questo avviene solo per $h = 0$, in tal caso il sistema ha la soluzione $t = 0, s = 1$. Per tutti gli altri valori di h le rette sono sghembe.

Soluzione 2.

Consideriamo il sistema lineare formato dalle equazioni cartesiane delle due rette date

$$\begin{cases} hx - y + 1 = 0 \\ (h - 1)x - y + z = 0 \\ -y + z = 0 \\ 2x - y - z - 2h + 2 = 0 \end{cases}$$

La matrice completa del sistema

$$\begin{pmatrix} h & -1 & 0 & -1 \\ h - 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2h - 2 \end{pmatrix}$$

ha determinante $2h(h - 1)$, pertanto per $h \neq 0$ e $h \neq 1$ ha rango 4. La matrice dei coefficienti ha al massimo rango 3, per cui per $h \neq 0$ e $h \neq 1$ il sistema è impossibile, quindi le rette non hanno punti comuni. Inoltre se le rette fossero parallele la matrice dei coefficienti dovrebbe avere rango 2 ma per $h \neq 0$ e $h \neq 1$ ha rango 3 perché la differenza fra il rango della matrice completa e il rango della matrice dei coefficienti è sempre minore o uguale ad 1. Dunque per

$h \neq 0$ e $h \neq 1$ le rette sono sghembe.

Per $h = 0$ il sistema diventa

$$\begin{cases} -y + 1 = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ -y + z = 0 \\ 2x - y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

e si vede subito che ammette l'unica soluzione $x = 0, y = 1, z = 1$, per cui le due rette sono incidenti.

Per $h = 1$ il sistema diventa

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ -y + z = 0 \\ -y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

e si vede subito che è impossibile in quanto dalla terza e quarta equazione si ottiene $x = y = z$ che sostituita nella prima genera la contraddizione $0 = 1$. Le rette quindi non sono incidenti, ma giacciono entrambe nel piano $-y + z = 0$ quindi sono parallele.

Soluzione 3.

Discutiamo il sistema lineare formato dalle equazioni cartesiane delle due rette date usando l'eliminazione di Gauss Jordan. Riduciamo a scala la matrice completa del sistema

$$\begin{pmatrix} h & -1 & 0 & -1 \\ h-1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2h-2 \end{pmatrix}$$

. Sottraendo alla prima riga la seconda abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ h-1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2h-2 \end{pmatrix},$$

poi, togliendo alla seconda riga la prima moltiplicata per $h-1$ e alla quarta riga la prima moltiplicata per 2, abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & h & h-1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2h \end{pmatrix},$$

di nuovo, togliendo dalla terza e dalla quarta riga la seconda, abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & h & h-1 \\ 0 & 0 & 1-h & 1-h \\ 0 & 0 & 1-h & h+1 \end{pmatrix},$$

infine, togliendo dalla quarta riga la terza, abbiamo la matrice a scala

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & h & h-1 \\ 0 & 0 & 1-h & 1-h \\ 0 & 0 & 0 & 2h \end{pmatrix}.$$

Pertanto se $h \neq 0$ e $h \neq 1$ la matrice completa ha rango 4, quella dei coefficienti ha rango 3 ed il sistema è impossibile, quindi le due rette sono sghembe (e non parallele se no la matrice dei coefficienti dovrebbe avere rango 2).

Se $h = 0$ sia la matrice dei coefficienti, sia quella completa hanno rango 3 ed il sistema ha una

e una sola soluzione e le due rette sono incidenti.

Se $h = 1$ la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e si vede subito che la matrice completa ha rango 3 e quella dei coefficienti rango 2, il sistema è quindi impossibile e calcolando i parametri direttori delle due rette in questo caso si verifica facilmente che sono parallele.

- In qualunque modo si sia risolto il precedente punto, si è ottenuto che le due rette hanno un punto in comune solo per $h = 0$ ed allora si vede subito che la soluzione del sistema $(0, 1, 1)$ rappresenta le coordinate del punto di intersezione fra le due rette.
- Dal punto 1. si ha che per $h = -1$ le due rette sono sghembe.

Soluzione 1.

Sappiamo da 1. (soluzione 1) che per $h = -1$ i parametri direttori di r sono $1, -1, 1$ e quelli di s sono $1, 1, 1$. Preso un punto di s , ad esempio $(-2, 0, 0)$, il piano per s parallelo ad r ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -2 + t + u \\ y = 0 - t + u \\ z = 0 + t + u \end{cases}$$

e quindi equazione cartesiana $x - z + 2 = 0$.

Soluzione 2.

Per $h = -1$ la retta r ha parametri direttori $1, -1, 1$ e la retta s ha equazioni

$$s : \begin{cases} -y + z = 0 \\ 2x - y - z + 4 = 0 \end{cases}$$

Il generico piano del fascio di sostegno s ha dunque equazione $\lambda(-y + z) + \mu(2x - y - z + 4) = 0$ e dunque ha parametri direttori $2\mu, -\mu - \lambda, -\mu$, dunque dalla condizione di parallelismo retta piano abbiamo $2\mu + \mu + \lambda + \lambda - \mu = 0$, ovvero $\lambda = -\mu$, da cui otteniamo il piano $x - z + 2 = 0$.

b. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \mathcal{L} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

1. Trovare dimensioni e basi di $W = \ker(A)$ ed U .
2. Trovare dimensioni e basi di $U + W$ ed $U \cap W$.
3. Completare la base di $U + W$ ad una base di \mathbb{R}^4 .

Soluzione

1. Lo spazio $W = \ker(A)$ è il sottospazio di \mathbb{R}^4 formato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$, ovvero

$$\begin{cases} x + 2y + t = 0 \\ 2x + 3y + z + 2t = 0 \\ y - z = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}.$$

La matrice A ha rango 2, in quanto la terza e la quarta riga sono combinazione lineare delle prime due con coefficienti 2, -1 e -1, 1 rispettivamente, pertanto $\dim W = 4 - 2 = 2$. Si ha infatti

$$W = \ker A = \left\{ \begin{pmatrix} -2h - k \\ h \\ h \\ k \end{pmatrix} \mid h, k \in \mathbb{R} \right\},$$

da cui si vede subito che una base di W è $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Il sottospazio U ha due generatori per definizione e si vede subito che questi generatori sono

linearmente indipendenti, pertanto ha dimensione 2 e una base di U è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

L'unione insiemistica dei vettori di una base di W e di una base di U sono un sistema di generatori di $U + W$, estraiamo quindi una base dall'insieme di vettori

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$

che sono un insieme di generatori di $U + W$. Si vede subito che il quarto vettore è la somma del secondo e del terzo e che i primi tre vettori sono linearmente indipendenti. Pertanto $U + W$ ha dimensione 3 e una sua base è

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dalla formula di Grassmann segue subito che $\dim(U \cap W) = 1$ e si vede anche che $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$$-\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ pertanto appartiene a } U \cap W \text{ ed è una sua base.}$$

2. Per completare

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ad una base di \mathbb{R}^4 , basta aggiungere un vettore di \mathbb{R}^4 che sia linearmente indipendente dai precedenti, pertanto consideriamo il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. La matrice $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante -1 e pertanto i quattro vettori trovati sono una base di \mathbb{R}^4 , estensione della base di $U + W$.

c. Sia $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ l'applicazione lineare rappresentata rispetto alla base canonica $S_2 = \{1, x, x^2\}$ dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Trovare dimensioni e basi di $\ker(f)$ e di $\text{Im}(f)$.
2. Verificare che $\mathcal{B} = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ è una base di $\mathbb{R}_2[x]$ e scrivere la matrice del cambiamento di base da S_2 a \mathcal{B} .
3. Scrivere la matrice A' che rappresenta f rispetto alla base \mathcal{B} .

Soluzione

1. È noto che $\dim(\ker(f)) = \dim(\ker(A))$. Si vede subito che $\text{rk}(A)=2$ e dunque $\dim(\ker(f)) = 3 - 2 = 1$. $\ker A$ (insieme delle soluzioni del sistema lineare $A\underline{x} = \underline{0}$) è $\{(h, -h, 0)^T | h \in \mathbb{R}\}$ e dunque una sua base è formata dal vettore $(1, -1, 0)^T$, quindi una base di $\ker(f)$ è $1 - x$. Lo spazio colonne di A ha come base $\{(1, 1, 1)^T, (1, -1, 1)^T\}$, quindi una base di $\text{Im}(f)$ è $\{1 + x + x^2, 1 - x + x^2\}$.
2. Le componenti dei vettori di \mathcal{B} rispetto alla base canonica sono i vettori $(1, 0, 0)^T, (1, 1, 0)^T, (1, 1, 1)^T$, dal loro accostamento troviamo una matrice di determinante 1 e quindi sono vettori linearmente indipendenti, pertanto i vettori di \mathcal{B} sono linearmente indipendenti ed, essendo in numero uguale alla dimensione di $\mathbb{R}_2[x]$, sono una base di $\mathbb{R}_2[x]$. Abbiamo definito la matrice di cambiamento di base da S_2 a \mathcal{B} , come $T = M_{\mathcal{B}, S_2}(I_{\mathbb{R}_2[x]})$, quindi

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Soluzione 1.

È noto che $A' = T^{-1}AT$, dunque

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soluzione 2.

Lo stesso risultato si ottiene calcolando la matrice formata dall'accostamento dei vettori delle componenti delle immagini dei vettori di \mathcal{B} rispetto a \mathcal{B} . Le immagini dei vettori di \mathcal{B} rispetto alla base canonica hanno componenti $f((1, 0, 0)^T) = (1, 1, 1)^T$, $f((1, 1, 0)^T) = (2, 2, 2)^T$, $f((1, 1, 1)^T) = (3, 1, 3)^T$. Quindi $f(1) = 1 + x + x^2$, $f(1+x) = 2 + 2x + 2x^2$, $f(1+x+x^2) = 3 + x + 3x^2$, dunque questi vettori rispetto alla base \mathcal{B} hanno componenti $(0, 0, 1)^T, (0, 0, 2)^T, (2, -2, 3)^T$ e la matrice che rappresenta f rispetto alla base \mathcal{B} è

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$