

Esercizio 1

Mostrare che i 3 vettori $\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\underline{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{w} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ formano una base B di \mathbb{R}^3 e scrivere la matrice di passaggio dalla base B alla base canonica.

Soluzione

Il determinante della matrice $[\underline{v}|\underline{u}|\underline{w}]$ è -10 , pertanto i tre vettori sono linearmente indipendenti, quindi $L(\underline{v}, \underline{u}, \underline{w})$ è un sottospazio di \mathbb{R}^3 di dimensione 3 e pertanto coincide con \mathbb{R}^3 , dunque i tre vettori sono una base B di \mathbb{R}^3 . La matrice $M_{E;B}(I_3)$ di passaggio dalla base canonica E alla base B è formata

dall'accostamento dei vettori della base B rispetto alla base E , ovvero è $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, quindi la

matrice di passaggio dalla base B alla base E è l'inversa della matrice precedente, ovvero

$M_{B;E}(I_3) = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{7}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$. Si poteva direttamente calcolare $M_{E;B}(I_3)$ cercando le componenti dei vettori

della base canonica rispetto ai vettori della base B . La generica combinazione lineare dei vettori della

base B è $\begin{bmatrix} a+b-2c \\ 2b+3c \\ -a+b \end{bmatrix}$, quindi per ottenere \underline{e}_1 deve essere $a=b$, $b=-\frac{3}{2}c$, $c=-\frac{1}{5}$ e pertanto $\underline{e}_1|_B = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$ e

analogamente si trovano $\underline{e}_2|_B$ e $\underline{e}_3|_B$.

Esercizio 2

Sia $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la seguente applicazione lineare $f([x, y, z, t]^T) = [x+y-2z+t, x-y+z+t, x-2z, y+t]^T$. Dimostrare che f ammette $\lambda=0$ come autovalore. Trovare gli autovettori di f associati all'autovalore 0.

Soluzione

La matrice associata ad f è $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ed ha determinante nullo in quanto la prima riga è

uguale a terza più quarta riga. Poiché il determinante di una matrice è il prodotto degli autovalori, la matrice e quindi f ha un autovalore nullo. Gli autovettori associati all'autovalore 0 sono le

autosoluzioni del sistema lineare $A\underline{x}=0$ che sono $\left\{ \begin{bmatrix} -4k \\ -3k \\ -2k \\ 3k \end{bmatrix} \mid k \neq 0 \right\}$.

Esercizio 3

Sia data la funzione lineare $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da: $T: (x,y,z,w) \rightarrow (x+2y-z+w, z+w)$.

- Calcolare le dimensioni di $\ker(T)$ e di $\text{Im}(T)$.
- Determinare una base B_0 di $\ker(T)$
- Completare la base B_0 a una base di \mathbb{R}^4 .

Soluzione

La matrice associata a T è $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. A ha rango 2 e dunque $\dim(\ker T) = 2$ e $\dim(\text{Im } T) = 2$.

I vettori di $\ker T$ sono le soluzioni del sistema $A\underline{x} = \underline{0}$ e hanno quindi la forma $\begin{bmatrix} -h-2k \\ h \\ -k \\ k \end{bmatrix}$. Una base è

quindi formata dai vettori $[-1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$, $[-2 \ 0 \ -1 \ 1]^T$. E' immediato verificare che i vettori \underline{e}_1 ed \underline{e}_4 della base canonica formano con $[-1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$, $[-2 \ 0 \ -1 \ 1]^T$ un insieme di vettori linearmente indipendenti e quindi una base di \mathbb{R}^4 che completi B_0 è $\{[-1 \ 1 \ 0 \ 0]^T, [-2 \ 0 \ -1 \ 1]^T, \underline{e}_1, \underline{e}_4\}$.

Esercizio 4

Dire per quali valori di k la matrice $A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -k \end{bmatrix}$ è diagonalizzabile. Per tali valori trovare una matrice diagonale D a cui A sia simile e una matrice P tale che $P^{-1}AP = D$.

Soluzione

Gli autovalori della matrice A sono $k, 3, -k$. Per $k \notin \{0, 3, -3\}$ sono distinti e quindi la matrice è diagonalizzabile. Per $k=0$, la matrice ha l'autovalore 0 con molteplicità algebrica 2 e l'autovalore 3 come autovalore semplice. Cerchiamo la molteplicità geometrica dell'autovalore 0. Poiché il rango di

$A - 0I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ è 2 la molteplicità geometrica di 0 è 1 e la matrice non è diagonalizzabile.

Per $k=3$ la matrice A ha l'autovalore 3 con molteplicità algebrica 2 e l'autovalore -3 semplice.

Cerchiamo allora la molteplicità geometrica dell'autovalore 3. La matrice $A - 3I$ è $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -6 \end{bmatrix}$ ed ha

ancora rango 2 per cui l'autovalore 3 non è regolare e la matrice non è diagonalizzabile. Per $k=-3$ la matrice ha ancora l'autovalore 3 con molteplicità algebrica 2 e l'autovalore -3 semplice. Calcoliamo la

molteplicità geometrica di 3. In questo caso si ha $A-3I = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ ed il rango è ancora 2 per cui

l'autovalore 3 non è regolare e la matrice non è diagonalizzabile. Dunque la matrice è diagonalizzabile

per ogni valore di $k \notin \{0, 3, -3\}$. Per tali valori di k è simile alla matrice diagonale $D = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{bmatrix}$. La

matrice di passaggio P è formata dall'accostamento di 3 autovettori relativi rispettivamente all'autovalore k , all'autovalore 3 e all'autovalore $-k$. Gli autovettori relativi all'autovalore k sono le

autosoluzioni del sistema lineare omogeneo $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3-k & 0 \\ 2 & -2 & -2k \end{bmatrix} \underline{x} = \underline{0}$, ovvero $\begin{bmatrix} (3-k)h \\ -3h \\ h \end{bmatrix}$ con $h \neq 0$. Gli

autovettori relativi all'autovalore 3 sono le autosoluzioni del sistema lineare omogeneo

$\begin{bmatrix} k-3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -k-3 \end{bmatrix} \underline{x} = \underline{0}$, ovvero $\begin{bmatrix} 0 \\ (k+3)t \\ -2t \end{bmatrix}$ con $t \neq 0$. Gli autovettori relativi all'autovalore $-k$ sono le

autosoluzioni del sistema lineare omogeneo $\begin{bmatrix} 2k & 0 & 0 \\ 3 & 3-k & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} = \underline{0}$, ovvero $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{bmatrix}$ con $s \neq 0$. Comunque si

scelgono, h, t, s non nulli i tre autovettori (essendo relativi ad autovalori diversi) sono linearmente

indipendenti e dunque $P = \begin{bmatrix} 3-k & 0 & 0 \\ -3 & k+3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Esercizio 5

Trovare i valori del parametro reale h per cui la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ h+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ è simile alla matrice

$B = \text{diag}(1, 1, 2)$, dire se per tali valori R^3 ammette una base di autovettori di A e scrivere la matrice P tale che $P^{-1}AP = B$.

Soluzione

Se esistono valori di h per cui la matrice A è simile a B , per tali valori A è diagonalizzabile e dunque R^3 ammette una base di autovettori di A . Perché A sia simile a B , A deve essere diagonalizzabile ed ammettere come autovalori 1 con molteplicità algebrica 2 e 2 con molteplicità algebrica 1. Il polinomio caratteristico di A è $(2-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 2(h+1)]$, quindi affinché ammetta radice 1 con molteplicità algebrica 2

deve essere $h = -1$. Per tale valore si ha $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. La matrice $A-I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ha rango 2 e

dunque l'autovalore 1 ha molteplicità geometrica 1, la matrice A non è dunque diagonalizzabile e non può essere simile a B.

Esercizio 6

Dire se esistono valori di h per cui le due matrici

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & h & 1 \end{bmatrix}$ possono essere associate ad una stessa applicazione lineare (rispetto a basi diverse).

Soluzione

Sia f l'applicazione lineare da V a W rappresentata da A quando V è riferito ad una base B e W è riferito ad una base C , e supponiamo che B rappresenti la stessa applicazione da V a W quando V è riferito ad una base B' e W ad una base C' allora A e B devono essere legate in questo modo $P^{-1}AQ = B$ dove P è la matrice $M_{CC'}(I_V)$ e Q è $M_{BB'}(I_W)$. Le matrici di cambiamento di base sono tutte e sole le matrici non singolari e dunque si tratta di trovare due matrici non singolari P e Q tali che $AQ = PB$ e ovviamente questo si può fare prendendo $P=A$ e $Q=B$, visto che A e B hanno entrambe determinante diverso da 0. Osservate che se una avesse determinante diverso da 0 e l'altra determinante nullo, non sarebbe mai possibile trovare le matrici P e Q non singolari, in quanto per soddisfare $P^{-1}AQ = B$ A e B devono avere lo stesso rango. Se invece entrambe avessero lo stesso rango (non massimo) potremmo solo procedere con forza bruta (sistema di 9 equazioni in 18 incognite + condizione di non singolarità). Se la parola applicazione lineare nel testo fosse sostituita con endomorfismo, si tratterebbe in pratica di verificare se le due matrici A e B sono simili, infatti due matrici sono associate ad uno stesso endomorfismo se e solo se sono simili. Le due matrici hanno gli stessi autovalori: 2 con molteplicità algebrica 1 e 2 con molteplicità algebrica 2. La molteplicità geometrica di 1 per la matrice A è 2, mentre per la matrice B è 1. Dunque le due matrici non sono simili e quindi non possono essere associate ad uno stesso endomorfismo.

Esercizio 7

Dimostrare che esiste ed è unica l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ che soddisfa le seguenti condizioni

- $[1; 1; 0]^T$ è autovettore per f relativo all'autovalore -1 ;
- $[1; 0; 1]^T$ appartiene al nucleo di f ;
- $f([0; 1; 1]^T) = [2; 1; 1]^T$.

(1) Scrivere la matrice $M_{B,B}(f)$ rispetto alla base $B = \{[1; 1; 0]^T, [1; 0; 1]^T, [0; 1; 1]^T\}$.

(2) Trovare gli autovalori di f .

(3) Trovare una base per ogni autospazio.

(4) Stabilire se f è diagonalizzabile, motivando la risposta.

Soluzione

(1) Chiamando $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ i vettori di B, dalle ipotesi abbiamo $f(\underline{v}_1) = -\underline{v}_1, f(\underline{v}_2) = \underline{0}, f(\underline{v}_3) = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$

Quindi, la matrice associata ad f rispetto alla base B è data da
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) La matrice è triangolare, quindi i suoi autovalori sono gli elementi principali, cioè $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

(3) Il rango di $M_{B,B}(f)$ è 2, quindi la molteplicità geometrica di $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ è $3 - 2 = 1$. Quindi

entrambi gli autospazi $E_0 = \text{Ker } f$ ed E_{-1} hanno dimensione 1. Dalle ipotesi deduciamo immediatamente che \underline{v}_1 è una base di E_{-1} , mentre \underline{v}_2 è una base di E_0 .

(4) Poiché la molteplicità geometrica dell'autovalore doppio è diversa dalla sua molteplicità algebrica, f non è diagonalizzabile.

Esercizio 8

Sia $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo associato alla matrice $M_{B,B}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ rispetto alla base

$B = ([1; 1; 0]^T; [0; 1; 1]^T; [0; 0; 1]^T)$ di \mathbb{R}^3 .

Calcolare gli autovalori di T; una base per ogni suo autospazio, e, se possibile, una matrice P invertibile tale che $P^{-1} M_{B,B}(T) P$ sia una matrice diagonale.

Scrivere la matrice associata a T rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 .

Soluzione

Il polinomio caratteristico di $M_{B,B}(T)$ (e quindi di ogni altra matrice che rappresenti T) risulta

$(\lambda-1)(\lambda-2)^2$. Abbiamo quindi un autovalore semplice $\lambda = 1$, e un autovalore $\lambda = 2$, di molteplicità algebrica 2. Ad essi corrispondono gli autospazi $E_2 = \{[0, y, 0]^T \mid y \in \mathbb{R}\}$ ed $E_1 = \{[0, -3h, h]^T \mid h \in \mathbb{R}\}$.

Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ i vettori appartenenti alla base B. Una base di E_2 è fornita, per esempio, dal vettore che rispetto alla base B ha componenti 0,1,0 e quindi rispetto alla base canonica è $\underline{w}_1 = 0 \underline{v}_1 + 1 \underline{v}_2 + 0 \underline{v}_3 = \underline{v}_2 = [0, 1, 1]^T$, mentre una base di E_1 può essere il vettore che rispetto alla base B ha componenti 0,-3,1 e quindi rispetto alla base canonica è $\underline{w}_2 = 0 \underline{v}_1 - 3 \underline{v}_2 + 1 \underline{v}_3 = [0, -3, -2]^T$. Poiché l'autospazio E_1 ha dimensione 1, la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 1$ è minore della molteplicità algebrica, quindi l'endomorfismo non è diagonalizzabile. Pertanto non esiste alcuna matrice P del tipo richiesto. Per scrivere la matrice A associata a T rispetto alla base canonica possiamo procedere in vari modi:

a) I vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ rispetto alla base B sono i vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e dunque rispetto alla base B

abbiamo $T(\underline{v}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, T(\underline{v}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, T(\underline{v}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, ed essendo $\underline{e}_1 = \underline{v}_1 - \underline{v}_2 + \underline{v}_3, \underline{e}_2 = \underline{v}_2 - \underline{v}_3, \underline{e}_3 = \underline{v}_3$ rispetto

alla base B abbiamo $T(\underline{e}_1)|_B = T(\underline{v}_1) - T(\underline{v}_2) + T(\underline{v}_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $T(\underline{e}_2)|_B = T(\underline{v}_2) - T(\underline{v}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $T(\underline{e}_3)|_B = T(\underline{v}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Rispetto alla base canonica allora $T(\underline{e}_1) = 1\underline{v}_1 + 3\underline{v}_2 + 1\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$, $T(\underline{e}_2) = 0\underline{v}_1 - \underline{v}_2 - 2\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $T(\underline{e}_3) = 0\underline{v}_1 + 3\underline{v}_2 + 2\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, per cui $A = M_{EE}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix}$. Ovviamente avremmo potuto trovare $\underline{e}_1|_B$, $\underline{e}_2|_B$, $\underline{e}_3|_B$, da cui $T(\underline{e}_1)|_B = M_{BB}(T)\underline{e}_1|_B$, $T(\underline{e}_2)|_B = M_{BB}(T)\underline{e}_2|_B$, $T(\underline{e}_3)|_B = M_{BB}(T)\underline{e}_3|_B$, continuando come nel caso precedente.

b) Ricordando che $M_{EE}(T) = M_{BE}(I)^{-1} M_{EE}(T) M_{BE}(I)$ e che $M_{EB}(I) = M_{BE}(I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ da cui

$$M_{BE}(I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ si ritrova } M_{EE}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 9

Siano date le matrici: $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -h & h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & h & -h \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3+h \end{bmatrix}$ dipendenti dal parametro reale h:

- (1) Posto $h = -2$; determinare gli autovalori ed una base per ogni autospazio di A.
- (2) Per quali h la matrice A è diagonalizzabile?
- (3) Per quali h le due matrici A e B sono simili?

Soluzione

(1) Per $h = -2$ la matrice A diventa $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e il suo polinomio caratteristico è $(1-\lambda)[(3-\lambda)(-2-\lambda)+6] = (1-\lambda)(-\lambda+\lambda^2)$. Gli autovalori di A sono dunque 0 con molteplicità algebrica 1 e 1 con molteplicità algebrica 2. L'autospazio E_0 relativo all'autovalore 0 è costituito dai vettori $\{[h, h, 0]^T | h \in \mathbb{R}\}$. Una base per tale autospazio è dunque $[1, 1, 0]^T$. L'autospazio E_1 relativo

all'autovalore 1 è costituito dai vettori soluzioni del sistema $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} = \underline{0}$ ovvero dai vettori $\{[3h, 2h, k]^T | h, k \in \mathbb{R}\}$. Una base per tale autospazio è dunque $\{[3, 2, 0]^T, [0, 0, 1]^T\}$.

(2) Il polinomio caratteristico di A è $(1-\lambda)[(3-\lambda)(h-\lambda)-3h]=(1-\lambda)(\lambda^2-(h+3)\lambda)$ e dunque A ha autovalori $1,0,h+3$. Se $h \neq -3$ e $h \neq -2$ i tre autovalori sono distinti e la matrice è diagonalizzabile. Per $h=-2$ abbiamo visto nel punto precedente che la matrice ha l'autospazio associato all'autovalore doppio 1 di dimensione 2 e dunque 1 ha molteplicità geometrica 2 e la matrice avendo tutti gli autovalori regolari è diagonalizzabile. Per $h=-3$ la matrice ha l'autovalore 0 con molteplicità algebrica 2 e l'autovalore 1 come autovalore semplice. Cerchiamo la molteplicità

geometrica di 0. Per $h=-3$ la matrice $A=A-0I$ diventa $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ed ha rango 2 per cui la

molteplicità geometrica di 0 è 1 e la matrice non è diagonalizzabile.

(3) La matrice B ha autovalori $1,0,h+3$, quindi le due matrici A e B hanno stesso polinomio caratteristico, stesso determinante e stessa traccia per ogni valore di h. Se $h \neq -3$ e $h \neq -2$ entrambe le matrici A e B sono diagonalizzabili e simili a una stessa matrice diagonale, quindi simili fra

loro. Se $h=-2$ la matrice B diventa $B=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ed ha l'autovalore 1 con molteplicità

algebrica 2, la sua molteplicità geometrica è però 1 in quanto $B-I=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ha rango 2 e le

matrici non sono simili. Per $h=-3$ la matrice B diventa $B=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ed ha l'autovalore 0 con

molteplicità algebrica 2, la sua molteplicità geometrica è pure 2 in quanto $B=B-0I$ ha rango 1 e le due matrici non sono simili in quanto le molteplicità geometriche di 0 in A e B sono diverse.

Esercizio 10

Si consideri la matrice $M=\begin{bmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 2 & b \\ a & a & 2b \end{bmatrix}$ (con a,b parametri reali)

a. dire se per $a=0,b=1$ la matrice M è diagonalizzabile, in caso affermativo scrivere una matrice diagonale a cui risulta simile e una matrice che la diagonalizza,

b. determinare a,b in modo che i vettori $\underline{u}=[1;0;-1]^T$, $\underline{v}=[1;1;1]^T$, $\underline{w}=[1;-1;0]^T$ siano autovettori di M, per tali valori si scriva la matrice che rappresenta f_M rispetto alla base $\{\underline{u},\underline{v},\underline{w}\}$.

Soluzione

a. Per $a=0,b=1$ la matrice M diventa $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Il suo polinomio caratteristico è $(2-\lambda)[(2-\lambda)^2-1]=$

$(2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+3)$ per cui M ha autovalori 1,2,3 ed è diagonalizzabile avendo autovalori distinti.

E' simile alla matrice diagonale $\text{diag}(1,2,3)$. Gli autovettori relativi all'autovalore 1 sono $\{[h,-h,0]^T | h \neq 0\}$, quelli relativi all'autovettore 2 sono $\{[k,0,-k]^T | k \neq 0\}$, quelli relativi all'autovalore 3

sono $\{[t, t, 0]^T | t \neq 0\}$ da cui una matrice che diagonalizza M e la rende simile a $\text{diag}(1, 2, 3)$ è

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- b. Affinché \underline{u} sia un autovettore di M deve esistere un λ_1 tale che $M\underline{u} = \lambda_1 \underline{u}$, cioè $(M - \lambda_1 I)\underline{u} = \underline{0}$. Analogamente affinché \underline{v} sia un autovettore di M deve esistere un λ_2 tale che $(M - \lambda_2 I)\underline{v} = \underline{0}$ ed affinché \underline{w} sia un autovettore di M deve esistere un λ_3 tale che $(M - \lambda_3 I)\underline{w} = \underline{0}$. Essendo

$$M - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & a \\ 1 & 2-\lambda & b \\ a & a & 2b-\lambda \end{bmatrix}, (M - \lambda I)\underline{u} = \underline{0} \text{ implica } \begin{cases} 2-\lambda - a = 0 \\ 1 - b = 0 \\ a - 2b + \lambda = 0 \end{cases} \text{ da cui si ha } b=1, \lambda_1 = 2 - a. \text{ Ora con}$$

$$b=1 \text{ la matrice } M - \lambda I \text{ diventa } \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & a \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ a & a & 2-\lambda \end{bmatrix} \text{ e } (M - \lambda I)\underline{v} = \underline{0} \text{ implica } \begin{cases} 3-\lambda + a = 0 \\ 4-\lambda = 0 \\ 2+2a-\lambda = 0 \end{cases} \text{ da cui si trova}$$

$$a=1, \lambda_2=4. \text{ Infine con } a=b=1 \text{ la matrice } M - \lambda I \text{ diventa } \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \text{ e } (M - \lambda I)\underline{w} = \underline{0} \text{ implica}$$

$$\begin{cases} 1-\lambda = 0 \\ -1+\lambda = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \text{ da cui } \lambda_3 = 1. \text{ Poiché } \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \text{ sono linearmente indipendenti per } a=b=1 \text{ la matrice è}$$

diagonalizzabile e la matrice che la diagonalizza è proprio formata dal loro accostamento, la matrice che rappresenta f_M rispetto alla base $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\}$ è la matrice diagonale $\text{diag}(1, 4, 1)$.

Si poteva anche direttamente osservare che essendo $\{\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}\}$ una base di \mathbb{R}^3 , $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ sono

autovettori per M se e solo se M è diagonalizzabile e la matrice $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ formata

dall'accostamento di tali vettori la diagonalizza, Dobbiamo quindi avere $MP = P \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

$$\text{da cui } \begin{bmatrix} 2-a & 3+a & 1 \\ 1-b & 3+b & -1 \\ a-2b & 2a+2b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_2 & -\lambda_3 \\ -\lambda_1 & \lambda_2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e quindi } b=1, \lambda_2=4, a=1, \lambda_1=1, \lambda_3=1 \text{ e poi}$$

come sopra.

Esercizio 11.

Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito come $f([x, y, z, t]^T) = [0, 3x+3y+z, -x-y+z]^T$,

- Calcolare gli autovalori di f e stabilire se f è diagonalizzabile
- Determinare una base per ogni autospazio di f e, se esiste, un vettore di $\text{Im } f$ che non sia autovettore $\text{Im}(f)$.

Soluzione

a) La matrice associata ad f è $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, Il suo polinomio caratteristico è $-\lambda[(3-\lambda)(1-\lambda)+1] = -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 4)$. I suoi autovalori sono dunque 0 con molteplicità algebrica 2 e 3 con molteplicità algebrica 2. Calcoliamo la molteplicità geometrica di 2. La matrice $A - 2I =$

$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ ha rango 2 e quindi la molteplicità algebrica di 2 è 1 e l'endomorfismo non è diagonalizzabile.

b) L'autospazio associato all'autovalore 0 è costituito dalle soluzioni del sistema lineare

omogeneo $\begin{cases} 3x + 3y + z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$ ed è quindi costituito di vettori $\{[h, -h, 0]^T | h \in \mathbb{R}\}$, una base di tale

spazio è dunque $[1, -1, 0]^T$. L'autospazio associato all'autovalore 2 è formato dai vettori $\{[0, k, -k]^T | k \in \mathbb{R}\}$ ed una sua base è $[0, 1, -1]^T$. $\text{Im } f$ ha dimensione 2 e coincide con $\text{Col } A$, quindi ogni vettore della forma $a[0, 3, -1]^T + b[0, 1, 1]^T$ che non sia del tipo $c[0, 1, -1]^T$ soddisfa le condizioni richieste, ad esempio il vettore $[0, 3, -1]^T$ appartiene a $\text{Im } f$ e non è autovettore.