# Esame di Geometria e Algebra Lineare
**Politecnico di Milano – Ingegneria informatica**

**28 Luglio 2014**

1. Si considerino i seguenti tre piani in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \pi_1: &\quad x + ky + z - 1 = 0 \\ \pi_2: &\quad x + y + kz = 0 \\ \pi_3: &\quad 2y + kz - k = 0 \end{aligned}$$

   (a) Discutere la loro reciproca posizione al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.
   (b) Provare che per $k = 0$ i tre piani appartengono ad una stessa stella e trovare il punto in cui si intersecano.
   (c) Per quali valori di $k$ esiste una retta parallela a tutti e tre i piani?

2. Siano dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - z + t = y - t = 0\},$$
$$W = \mathcal{L}\{(1, 0, 1, -1), (0, 1, 2, 0)\}.$$

   (a) Calcolare la dimensioni e una base di $V$ e $W$.
   (b) Provare che $\mathbb{R}^4$ è somma diretta di $V$ e $W$.
   (c) Trovare una base ortogonale di $V^\perp$.
   (d) Provare che $W$ e $V^\perp$ sono spazi isomorfi.

3. Sia

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Trovare, al variare di $k$, una base ortonormale di autovettori di $A$.
   (b) Riconoscere la quadrica $Q$ di equazione $kx^2 + y^2 + z^2 + 2yz + 2y = 0$.
   (c) Stabilire per quali valori di $k$ la quadrica $Q$ è di rotazione, e per tali valori, determinare l'asse di rotazione di $Q$.

Soluzione

1. (a) Il sistema formato dalle equazioni dei tre piani ha come matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \\ 0 & 2 & k \end{pmatrix}.$$

Si ha $detA = (1-k)(k+2)$, quindi per $k \notin \{1, -2\}$ $rkA = rk[A|\underline{b}] = 3$ ed il sistema ha una e una sola soluzione, che rappresenta il centro di una stella di piani a cui appartengono i tre piani dati. Per $k = 1$ si ha $rkA = 2$ e $rk[A|\underline{b}] = 3$, dunque il sistema è impossibile, i tre piani quindi non appartengono né ad una stessa stella né ad uno stesso fascio, inoltre i piani $\pi_1$ e $\pi_2$ sono paralleli e non coincidenti mentre il piano $\pi_3$ non è parallelo ai due piani precedenti. Anche per $k = -2$ si ha $rkA = 2$ e $rk[A|\underline{b}] = 3$, dunque il sistema è impossibile, i tre piani quindi non appartengono né ad una stessa stella né ad uno stesso fascio.

(b) Per $k = 0$ come già visto il sistema ha una e una sola soluzione che è $x = 0, y = 0, z = 1$.

(c) I valori da considerare sono $k = 1$, $k = -2$. Per $k = -1$ abbiamo già visto che i piani $\pi_1$ e $\pi_2$ sono paralleli, pertanto le rette intersezioni fra $\pi_1$ e $\pi_3$ e fra $\pi_2$ e $\pi_3$ sono parallele ed ogni retta parallela ad esse è parallela ai tre piani $\pi_1, \pi_2$ e $\pi_3$. Per $k = -2$ le rette intersezione fra $\pi_1$ e $\pi_2$, fra $\pi_1$ e $\pi_3$ e fra $pi_2$ e $\pi_3$ hanno tutte parametri direttori $1, 1, 1$, pertanto ogni retta con parametri direttori $1, 1, 1$ è parallela ai tre piani.

2. (a) I vettori di $V$ hanno la forma $(z - t, t, z, t) = z(1, 0, 1, 0) + t(-1, 1, 0, 1)$. Pertanto $(1, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 1)$ sono generatori di $V$. Inoltre la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 2 e pertanto i vettori $(1, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 1)$ sono linearmente indipendenti, quindi fomano una base di $V$. Quindi $dimV = 2$. Lo spazio $W$ è per definizione generato da $(1, 0, 1, -1), (0, 1, 2, 0)$, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 2 e pertanto i vettori $(1, 0, 1, -1), (0, 1, 2, 0)$ sono linearmente indipendenti e formano una base di $W$, quindi $dimW = 2$.

(b) Considerata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

si ha subito che $detA \neq 0$ e dunque i quattro vettori $(1, 0, 1, -1), (0, 1, 2, 0), (1, 0, 1, -1), (0, 1, 2, 0)$ sono linearmente indipendenti e, essendo generatori di $V + W$ sono una base di $V + W$, Pertanto $R^4 = V + W$. dalla formula di Grassman si ha poi che $dimV \cap W = dimV + W - dimV - dimW = 0$ e pertanto $V \cup W = \underline{0}$, dunque $R^4$ è somma diretta di $V$ e $W$.

(c) I vettori $(1, 0, -1, 1), (0, 1, 0, -1)$ sono generatori di $V^\perp$ (i vettori di $V$ sono per definizione gli elementi del ker della matrice $2 \times 4$ che ha quei vettori come righe) e formano una base di $V^\perp$ in quanto linearmente indipendenti. Per trovare una base ortogonale di $V^\perp$ basta quindi applicare il procedimento di Gram-Schmidt. Una base ortogonale è quindi $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ ove $\underline{b}_1 = (1, 0, -1, 1)$ e $\underline{b}_2 = (0, 1, 0, -1) - \frac{-1}{3}(1, 0, -1, 1) = (\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$.

(d) $W$ e $V^\perp$ sono isomorfi in quanto spazi vettoriali su $R$ con la stessa dimensione.

3. (a) La matrice $A$ è reale simmetrica e dunque ortogonalmente diagonalizzabile pertanto $R^3$ ha una base ortonormale di autovettori di $A$. Si ha $detA = (k - \lambda)((1 - \lambda)^2 - 1$ per cui gli autovalori di $A$ sono $k, 0, 2$ Gli autovettori relativi all'autovalore $k$ sono della forma $[h, 0, 0]^T$ con $h \neq 0$. Gli autovettori relativi all'autovalore 0 se $k \neq 0$ hanno la forma $[0, s, -s]^T$ con $s \neq 0$, se invece $k = 0$ (ovvero 0 è un autovalore con molteplicità algebrica 2) hanno la forma $[t, s, -s]^T$ con $t$ ed $s$ non contemporaneamente nulli. Gli autovettori relativi all'autovalore 2 se $k \neq 2$ hanno la forma $[0, u, u]^T$ con $u \neq 0$, se invece $k = 2$ (ovvero 2 è un autovalore con molteplicità algebrica 2) hanno la forma $[r, u, u]^T$ con $r$ ed $u$ non contemporaneamente nulli. In ogni caso i tre vettori $[1, 0, 0]^T, [0, 1, -1]^T, [0, 1, 1]^T$ sono una terna di autovettori di $A$ a due a due ortogonali. Se li normalizziamo otteniamo la seguente base ortonormale di autovettori $[1, 0, 0]^T, [0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}]^T, [0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]^T$.

(b) Consideriamo le seguenti matrici associate alla quadrica:

$$B = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha $detB = -k$, $detA = 0$, pertanto se $k \neq 0$ la quadrica è un paraboloide e precisamente è un paraboloide ellittico se $k > 0$, iperbolico se $k < 0$. Per $k = 0$ la quadrica ha equazione $y^2 + z^2 + 2yz + 2y = 0$, si ha $rkA = 1$ e $rkB = 3$ pertanto la quadrica rappresenta un cilindro con generatrici parallele all'asse $x$ e per direttrice la parabola $y^2 + z^2 + 2yz + 2y = 0, z = 0$, dunque un cilindro parabolico.

(c) La matrice $A$ ha due autovalori doppi solo per $k = 2$ e per $k = 0$. Un cilindro parabolico non può essere un cilindro di rotazione. Consideriamo quindi $k = 2$. La quadrica ammettendo un autovalore doppio diverso da 0 è una quadrica di rotazione. Il suo asse di rotazione ha la direzione dell'autovettore associato all'autovalore singolo 0, quindi ha parametri direttori $0, 1, -1$. La quadrica ha equazione $2x^2 + y^2 + z^2 + 2yz + 2y = 0$, se la intersechiamo col piano $y = z$, perpendicolare all'asse di rotazione, abbiamo un sistema equivalente a $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2y = 0, y = z$. Questo ultimo sistema rappresenta una circonferenza di centro $(0, 1/4, 1/4)$, pertanto l'asse di rotazione è la retta di equazioni parametriche $x = 0, y = 1/4 + t, z = 1/4 - t$.