Geometria ed Algebra lineare

Alessandra Cherubini
alessandra.cherubini@polimi.it
tel.int. 4575

Ricevimento: Venerdì 10.30-12.30
o su appuntamento

Esercitatore: Achille Frigeri
achille.frigeri@polimi.it

Testi e valutazione

Per la teoria:

- A.Bernardi, A.Gimigliano: Algebra lineare e geometria analitica, Città Studi Edizioni.
- E. Schlesinger: Algebra lineare e geometria; Zanichelli.
- Dispense su Beep

Per gli esercizi:

- L.Mauri, E.Schlesinger: Esercizi di algebra lineare e geometria; Zanichelli.
- Eserciziario all'indirizzo: http://www.science.unitn.it/~carrara/ESERCIZIARIO/riunisci.pdf

Prove in itinere (o esame scritto) + orale

Prerequisiti

- Calcolo letterale
- Risoluzione di equazioni di I° e II° grado anche in presenza di parametri
- Un po' di geometria analitica del piano
- Nozioni base e notazioni sugli insiemi
- Nozioni base su funzioni e operazioni

Introduzione

Geometria=misura della terra

- Primo approccio: assiomatico (Euclide), concetti primitivi+assiomi
  - di incidenza
    - Per due punti distinti passa una ed una sola retta
    - Per tre punti non allineati passa uno ed un solo piano
    - Se una retta ed un piano si incontrano in più di un punto allora la retta appartiene al piano
    - Se due piani distinti hanno un punto comune allora la loro intersezione è una retta
  - delle parallele
    - Dati una retta r e un punto P esiste una ed una sola retta passante per P e parallela ad r

➢ Reciproca posizione di due rette nello spazio:
- <u>Incidenti</u>: con un punto in comune $\rightarrow$ appartengono ad uno stesso piano
- <u>Parallele</u>: appartenenti ad uno stesso piano, senza punti comuni $\rightarrow$stessa direzione
- <u>Sghembe</u>: non appartenenti ad uno stesso piano

Introduzione

- Secondo approccio: geometria analitica (Cartesio) $\rightarrow$ ogni problema geometrico viene tradotto in un problema algebrico
  - Vi è corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri reali e i punti di una retta su cui siano fissati un'origine, un verso di percorrenza e un'unità di misura
  - Vi è corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali (coordinate) e i punti di un piano su cui sia fissato un sistema di riferimento (due rette non parallele, un verso di percorrenza per ciascuna delle rette e un'unità di misura)
  - Vi è corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle terne ordinate di numeri reali (coordinate) e i punti dello spazio su cui sia fissato un sistema di riferimento (tre rette passanti per uno stesso punto e non giacenti su uno stesso piano, un verso di percorrenza per ciascuna delle rette e un'unità di misura)
  - ➢ Curve <u>nel piano</u> sono il luogo dei punti del piano le cui coordinate soddisfano ad una equazione nelle variabili x,y (una delle variabili potrebbe anche mancare).
  - ➢ Curve e superfici <u>nello spazio</u> sono viste come il luogo dei punti dello spazio le cui coordinate soddisfano rispettivamente a due equazioni e ad una equazione nelle variabili x,y,z (qualche variabile potrebbe anche mancare).

Vettori come linguaggio per la geometria

- Terzo approccio (quello che utilizzeremo): linguaggio dei vettori

Sapete dalla fisica cosa è un vettore (applicato) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, esso è determinato da:

  - Punto di applicazione
  - Direzione
  - Verso
  - Modulo

Noi utilizzeremo vettori geometrici (o liberi) determinati solo da:

  - Direzione
  - Verso
  - Modulo

In altre parole un vettore geometrico è un vettore di cui si dimentica il punto di applicazione (ovvero un vettore geometrico è l'insieme di tutti i vettori applicati con uguale direzione verso e modulo, visti come un unico oggetto), un vettore geometrico viene indicato con $\underline{v}$ ed il suo modulo con $\|\underline{v}\|$

Somma di vettori

- Vi è noto come fare la somma di due vettori applicati in uno stesso punto (regola del parallelogrammo)
- Dati due vettori geometrici $\underline{v}$, $\underline{w}$, la loro somma $\underline{v}+\underline{w}$ è il vettore geometrico $\underline{z}$ che ha stessa direzione, lo stesso modulo e lo stesso verso del vettore applicato che si ottiene sommando due vettori applicati in un punto O e aventi rispettivamente stessa direzione, stessi modulo e verso dei vettori $\underline{v}$, $\underline{w}$. (La definizione è ben posta perché non dipende dalla scelta di O).
- La somma gode delle seguenti proprietà
  - Commutativa: per ogni $\underline{v}$, $\underline{w}$ si ha $\underline{v}+\underline{w}= \underline{w}+\underline{v}$
  - Associativa: per ogni $\underline{v}$, $\underline{w}$, $\underline{u}$ si ha $(\underline{v}+\underline{w})+\underline{u}= \underline{v}+(\underline{w}+\underline{u})$
  - Esiste l'elemento neutro: esiste un vettore $\underline{0}$ (vettore di modulo nullo) tale che per ogni $\underline{v}$ si ha $\underline{v}+\underline{0}= \underline{v}$
  - Esiste l'opposto di ogni vettore: per ogni $\underline{v}$ esiste un vettore che indichiamo con $-\underline{v}$ (vettore con la stessa direzione e lo stesso modulo di v, ma verso opposto) tale che $\underline{v}+(-\underline{v})=\underline{0}$

Somma di vettori

Le proprietà che abbiamo appena elencato possono essere ''riassunte'' dicendo che l'insieme dei vettori geometrici forma un *gruppo abeliano rispetto alla somma di vettori* che abbiamo definito.

Dalle proprietà precedenti si possono ricavare anche le seguenti proprietà:

- Unicità dell'elemento neutro,
- Unicità del vettore opposto ad un vettore dato,
- Legge di cancellazione rispetto alla somma: $\underline{v}+\underline{w}=\underline{v}+\underline{u}$ implica $\underline{w}=u$,
- Esistenza ed unicità della soluzione di ogni equazione $\underline{x}+\underline{v}=\underline{w}$ (la soluzione è $\underline{x}=(-\underline{v})+\underline{w}$).

Prodotto di uno scalare per un vettore

Siano t un numero reale (scalare) e $\underline{v}$ un vettore, si chiama prodotto dello scalare t col vettore $\underline{v}$, il vettore $\underline{z}=t\underline{v}$ che ha

- la stessa direzione di $\underline{v}$,
- modulo $|t|\cdot\|\underline{v}\|$,
- verso uguale a $\underline{v}$ se $t>0$, opposto a $\underline{v}$ se $t<0$ (se $t=0$, $t\underline{v}=\underline{0}$ e per il vettore nullo non è definito un verso).

Il prodotto scalare-vettore gode delle seguenti proprietà:

- Per ogni scalare t e per ogni $\underline{v},\underline{w}$ si ha $t(\underline{v}+\underline{w})=t\underline{v}+t\underline{w}$
- Per ogni coppia di scalari t,s e per ogni $\underline{v}$ si ha $(t+s)\underline{v}=t\underline{v}+s\underline{v}$
- Per ogni coppia di scalari t,s e per ogni $\underline{v}$ si ha $(ts)\underline{v}=t(s\underline{v})$
- Per ogni $\underline{v}$ si ha $1\underline{v}=\underline{v}$

Dalle precedenti proprietà si ricava che $t\underline{v}=\underline{0}$ se e solo se $t=0$ o $\underline{v}=\underline{0}$.

Spazio vettoriale

Def. Uno spazio vettoriale V su un campo K (che per noi sarà sempre o l'insieme Q dei numeri razionali o l'insieme R dei numeri reali o l'insieme C dei numeri complessi rispetto alle loro abituali operazioni di somma e prodotto) è un insieme V, detto insieme dei vettori, su cui è definita un'operazione binaria interna detta somma, +, (ovvero una legge che od ogni coppia ordinata di vettori associa uno ed un solo vettore), tale che (V,+) sia un gruppo abeliano ed un'operazione esterna detta prodotto scalare-vettore (ovvero una legge che od ogni coppia ordinata di uno scalare e di un vettore associa uno ed un solo vettore) che goda delle proprietà:

- Per ogni scalare t e per ogni coppia di vettori $\underline{v}$,$\underline{w}$ si ha $t(\underline{v}+\underline{w})=t\underline{v}+t\underline{w}$
- Per ogni coppia di scalari t,s e per ogni vettore $\underline{v}$ si ha $(t+s)\underline{v}=t\underline{v}+s\underline{v}$
- Per ogni coppia di scalari t,s e per ogni vettore $\underline{v}$ si ha $(ts)\underline{v}=t(s\underline{v})$
- Per ogni vettore $\underline{v}$ si ha $1\underline{v}=\underline{v}$

➢ I vettori geometrici sul campo reale rispetto alla somma ed al prodotto scalare-vettore prima definiti formano uno spazio vettoriale

Combinazione lineare, vettori indipendenti, generatori

Sia V uno spazio vettoriale su un campo K

- Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2,\ldots, \underline{v}_n \in V$, ogni vettore $\underline{w} = t_1\underline{v}_1+t_2\underline{v}_2+\ldots+t_n\underline{v}_n$ con $t_1,t_2,\ldots,t_n \in K$ si dice *combinazione lineare* di $\underline{v}_1, \underline{v}_2,\ldots, \underline{v}_n$ e gli scalari $t_1,t_2,\ldots,t_n$ si dicono coefficienti della combinazione
- Un insieme di vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2,\ldots, \underline{v}_n \in V$ si dice *sistema di generatori* per V se ogni vettore di V si scrive come combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2,\ldots, \underline{v}_n$
- Un insieme di vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2,\ldots, \underline{v}_n \in V$ è un insieme di vettori *linearmente dipendenti* se $\underline{0}$ si può scrivere come combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2,\ldots, \underline{v}_n$ a coefficienti non tutti nulli, altrimenti è un insieme di vettori *linearmente indipendenti*.
- Un insieme di vettori che siano contemporaneamente un insieme di vettori linearmente indipendenti ed un sistema di generatori di V si dice *base* di V

Osservazioni

- Un insieme di vettori è costituito da vettori linearmente dipendenti se e solo se uno di essi è combinazione lineare degli altri, quindi ogni insieme di vettori che contenga il vettore $\underline{0}$ è sempre un insieme di vettori linearmente dipendenti
- Se consideriamo l'insieme dei vettori geometrici nel piano (più precisamente dei vettori paralleli al piano), due vettori sono linearmente dipendenti se e solo se hanno la stessa direzione (il vettore $\underline{0}$ si considera parallelo ad ogni vettore)
- Ogni coppia di vettori non paralleli fra loro è una base per l'insieme dei vettori geometrici nel piano, allora ogni altro vettore $\underline{v}$ nel piano si scrive (in uno e un sol modo) come combinazione lineare dei vettori della base, i coefficienti della combinazione sono detti *componenti del vettore* $\underline{v}$ rispetto alla base considerata
- Fissare un sistema di riferimento in un piano dato, significa fissare un'origine (punto O del piano) e una base (coppia di vettori $\underline{b}_1,\underline{b}_2$ non paralleli), le rette per O con le stesse direzioni rispettivamente di $\underline{b}_1,\underline{b}_2$ si dicono assi del sistema di riferimento e le componenti del vettore corrispondente al vettore applicato $\overrightarrow{OP}$ sono dette *coordinate* del punto P

Osservazioni

- Se consideriamo l'insieme dei vettori geometrici nello spazio, tre vettori $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ sono linearmente dipendenti se e solo se uno di essi è combinazione lineare dei restanti (o equivalentemente se tutti e tre i vettori sono paralleli ad uno stesso piano)
- Ogni terna di vettori linearmente indipendenti (non paralleli ad uno stesso piano) è una base per l'insieme dei vettori geometrici nello spazio, allora ogni altro vettore $\underline{v}$ nello spazio si scrive (in uno e un sol modo) come combinazione lineare dei vettori della base, i coefficienti della combinazione sono detti *componenti del vettore* $\underline{v}$ rispetto alla base considerata
- Fissare un sistema di riferimento nello spazio, significa fissare un'origine (punto O) e una base (terna di vettori $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ non paralleli ad uno stesso piano), le rette per O con le stesse direzioni rispettivamente di $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ si dicono *assi del sistema di riferimento* e le componenti del vettore corrispondente al vettore applicato $\overrightarrow{OP}$ sono dette *coordinate* del punto P

Proprietà delle componenti di un vettore

- Sia V uno spazio vettoriale sul campo K una funzione $f:V \to K$ si dice *funzione (forma) lineare* se
  - Per ogni $\underline{v},\underline{w} \in V$ si ha $f(\underline{v}+\underline{w})=f(\underline{v})+f(\underline{w})$
  - Per ogni $t \in K$ e per ogni $\underline{v} \in V$ si ha $f(t\underline{v})=tf(\underline{v})$

Per ogni vettore libero $\underline{v}$ del piano in cui si è fissata una base, indicate con (v_1,v_2) la coppia di componenti di $\underline{v}$ rispetto alla base fissata (ricordate che v_1,v_2 sono elementi di K), le applicazioni

- $f_1:V \to K$ definita da $f_1(\underline{v})=v_1$
- $f_2:V \to K$ definita da $f_2(\underline{v})=v_2$

sono funzioni lineari

Per ogni vettore libero $\underline{v}$ dello spazio in cui si è fissata una base, indicate con (v_1,v_2,v_3) la terna di componenti di $\underline{v}$ rispetto alla base fissata (v_1,v_2,v_3 sono elementi di K) le applicazioni

- $f_1:V \to K$ definita da $f_1(\underline{v})=v_1$
- $f_2:V \to K$ definita da $f_2(\underline{v})=v_2$
- $f_3:V \to K$ definita da $f_3(\underline{v})=v_3$

sono funzioni lineari

Conseguenze

- I vettori liberi nel piano possono essere identificati con l'insieme R^2 delle coppie ordinate di numeri reali, $R^2=\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} | x, y \in \mathrm{R}\right\}$ con la somma ed il prodotto scalare-vettore definiti da

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix}, \quad t\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} tx_1 \\ ty_1 \end{bmatrix}$$

- Se A e B sono due punti del piano di coordinate rispettivamente (x_1,y_1) e (x_2,y_2) il vettore libero con la stessa direzione e verso di $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ può essere identificato col vettore $\begin{bmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \end{bmatrix}$ di R^2

Conseguenze

- I vettori liberi nello spazio possono essere identificati con l'insieme R^3 delle terne ordinate di numeri reali, $R^3=\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} | x, y, z \in R\right\}$ con la somma ed il prodotto scalare-vettore definiti da

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{bmatrix}, \quad t\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} tx_1 \\ ty_1 \\ tz_1 \end{bmatrix}$$

- Se A e B sono due punti del piano di coordinate rispettivamente (x_1,y_1,z_1) e (x_2,y_2,z_2) il vettore libero con la stessa direzione e verso di $\overrightarrow{AB}$ può essere identificato col vettore $\begin{bmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \\ z_2-z_1 \end{bmatrix}$ di R^3

Sommario

Usando come guida i vettori geometrici (o liberi) abbiamo introdotto le nozioni di

- Spazio vettoriali
- Insieme di generatori
- Insieme di vettori linearmente indipendenti
- Base
- Componenti di un vettore rispetto a una base
- Funzioni lineari