Metodo di eliminazione di Gauss per i sistemi lineari

- Sia C la matrice completa di un sistema lineare S. Ogni mossa di Gauss applicata a C trasforma C nella matrice completa di un sistema equivalente ad S.
- Se con applicazioni successive di mosse di Gauss portiamo C nella matrice C' in forma a scala, il sistema S' che ha C'=[A'|b'] come matrice completa ha la forma

$$(1)\quad \begin{cases} a'_{i(1),j(1)}x_{j(1)} + a'_{i(1),j(1)+1}x_{j(1)+1} + \cdots\cdots\cdots + a'_{i(1),n}x_n = b'_{i(1)} \\ \qquad a'_{i(2),j(2)}x_{j(1)+1} + \cdots\cdots\cdots\cdots + a'_{i(2),n}x_n = b'_{i(2)} \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad a'_{i(r),j(r)}x_{j(r)} + \cdots + a'_{i(r),n}x_n = b'_{i(r)} \\ \qquad\qquad\qquad (0 = b'_{i(r)+1}) \end{cases}$$

dove $r \leq \min(m,n)$, $1 \leq j(1) < j(2) < \ldots < j(r) \leq n$.

- I pivot di A' sono $a'_{i(1),j(1)}$, $a'_{i(2),j(2)}$, …, $a'_{i(r),j(r)}$ e sono anche pivot di C' e precisamente, se r=m, o se r<m e $b'_{i(r+1)}=0$ sono tutti i pivot di C' (e in tal caso l'uguaglianza fra parentesi manca); altrimenti i pivot di C' sono $a'_{i(1),j(1)}$, $a'_{i(2),j(2)}$, …, $a'_{i(r),j(r)}$, $b'_{i(r+1)}$ e si ha l'uguaglianza assurda $0=b'_{i(r+1)}$, quindi il sistema è impossibile.

Metodo di eliminazione di Gauss per i sistemi lineari

Supponiamo ora di essere nel caso in cui r=m=min(m,n), o r<m ma $b_{i(r+1)}=0$. A meno di un riordino di equazioni e di nomi di variabili il sistema (1) diventa

$$(2)\ \begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots\cdots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \cdots\cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad a'_{rr}x_r + \cdots + a'_{rn}x_n = b'_r \end{cases}$$

- Se r=n=min(m,n) il sistema (2) diventa

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots\cdots + a'_{1r}x_r = b'_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \cdots\cdots + a'_{2r}x_r = b'_2 \\ \qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad\qquad a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases}$$

quindi dall'ultima equazione si ricava x_n, e si sostituisce nelle precedenti, dalla penultima si ricava x_{n-1} e così via, il sistema è pertanto determinato.

Metodo di eliminazione di Gauss per i sistemi lineari

- Se r<n il sistema (2) si può riscrivere nella forma

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots\cdots + a'_{1r}x_r = b'_1 - a'_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - a'_{1n}x_n \\ \qquad a'_{22}x_2 + \cdots\cdots + a'_{2r}x_r = b'_2 - a'_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - a'_{2n}x_n \\ \qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad a'_{rr}x_r = b'_r - a'_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - a'_{rn}x_n \end{cases}$$

- Le variabili $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ si dicono *variabili libere*, assegnando ad esse valori arbitrari, dall'ultima equazione si ricava x_r in funzione dei valori dati alle variabili libere e si sostituisce nelle equazioni precedenti, dalla penultima equazione si ricava x_{r-1} (sempre in funzione dei valori assegnati alle variabili libere) e così via, il sistema è quindi possibile, ma le soluzioni dipendono da n-r parametri arbitrari ed è pertanto indeterminato. Si dice che il sistema ha ∞^{n-r} soluzioni.

Sistemi omogenei

- La forma matriciale di un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite è $A\underline{x}=\underline{0}_{(m,1)}$, dove A è la matrice dei coefficienti di tipo (m,n), $\underline{x}$ è il vettore di tipo (n,1) delle incognite e il vettore dei termini noti è il vettore nullo di tipo (m,1) .
- La matrice completa $C=[A|\underline{0}]$ ha gli stessi pivot di A, quindi il sistema è sempre possibile e l'insieme delle sue soluzioni viene chiamato ker A
- Sia r il numero di pivot di A (e di C)
  - Se r=n allora $\ker A=\{\underline{0}_{(n,1)}\}$
  - Se r<n il sistema ammette autosoluzioni ($\ker A\supset\{\underline{0}_{(n,1)}\}$), le soluzioni sono combinazioni lineari di n-r vettori (che possono essere scelti in modo opportuno, ciascuno di essi infatti si può ottenere assegnando ad una delle variabili libere il valore 1 e alle altre il valore 0)
- Dato il sistema lineare S di forma matriciale $A\underline{x}=\underline{b}$, il sistema omogeneo con la stessa matrice dei coefficienti si dice *sistema omogeneo associato* ad S. Se S è possibile tutte e sole le soluzioni di S si ottengono sommando ad una soluzione particolare di S le soluzioni del sistema omogeneo associato.

Rango di una matrice

- Data una matrice A di tipo (m,n) si chiama *rango* di A, rk(A), il numero di pivot di una matrice a scala A' ottenuta da A col metodo di Gauss. Equivalentemente il rango di A è il numero delle righe non nulle di A'. Vedremo in seguito che questa definizione non dipende dal modo con cui l'eliminazione di Gauss è fatta e dunque è ben posta.
  - $rk(A) \geq 0$ e $rk(A)=0$ se e solo se A è la matrice nulla
  - $rk(A) \leq \min(m,n)$
  - Se A è una sottomatrice di una matrice C (ovvero se A è la matrice degli elementi che si trovano sull'intersezione di un sottoinsieme delle righe di C con un sottoinsieme delle colonne di C), allora $rk(A) \leq rk(C)$
  - In particolare se C è la matrice ottenuta accostando un vettore colonna ad A, allora $rk(A) \leq rk(C) \leq rk(A)+1$ (questa disuguaglianza quindi sussiste sempre fra la matrice dei coefficienti A e la matrice completa C di un sistema lineare).

Teorema di Rouché-Capelli

- Sia S un sistema lineare (di m equazioni) in n incognite sul campo K, che scriviamo in forma matriciale come $A\underline{x}=\underline{b}$.
S è possibile se e solo se il rango rk(A)=r della sua matrice dei coefficienti è uguale al rango $rk([A|\underline{b}])$ della matrice completa.
Se r=n il sistema è anche determinato, se r<n il sistema ammette infinite soluzioni che dipendono da n-r parametri arbitrari (in breve ∞^{n-r} soluzioni), in altre parole esistono n-r+1 vettori $\underline{v}_0, \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{n-r}$ di tipo (n,1) tali che tutte e sole le soluzioni di S hanno la forma $\underline{v}=\underline{v}_0+t_1\underline{v}_1+t_2\underline{v}_2+\ldots+t_{n-r}\,\underline{v}_{n-r}$ al variare di $t_1,t_2,\ldots,t_{n-r}$ in K. Se S è omogeneo $\underline{v}_0=\underline{0}$.
- Il numero di equazioni del sistema non interviene nel teorema di Rouché-Capelli, infatti se la matrice dei coefficienti e quella completa si trasformano in matrici a scala con r righe non nulle, questo significa che le altre righe delle matrici A e $[A|\underline{b}]$ sono combinazioni lineari delle precedenti e quindi corrispondono ad equazioni automaticamente soddisfatte da ogni soluzione del sistema formato dalle prime r equazioni.

Corollari del teorema di Rouché-Capelli

- Un sistema lineare $A\underline{x}=\underline{b}$ con n equazioni in n incognite (ovvero con A matrice quadrata) con rk(A)=n ha sempre una e una sola soluzione. (Parte della Regola di Cramer, che nel suo enunciato completo descrive anche la forma della soluzione)

- Un sistema lineare omogeneo $A\underline{x}=\underline{0}$ (con m equazioni) in n incognite ammette autosoluzioni se e sono se rk(A)<n. In tal caso ha ∞^{n-r} soluzioni la cui forma è $\underline{v}=t_1\underline{v}_1+\ldots t_{n-r}\underline{v}_{n-r}$ dove $\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_{n-r}$ sono vettori di tipo (n,1) ed i coefficienti t_i assumono valori arbitrari nel campo K.

Interpretazione geometrica di sistemi con 2 incognite

Sia S un sistema lineare di m equazioni in 2 incognite di forma $A\underline{x}=\underline{b}$.

- $1 \le rk(A) \le \min(2,m)$, $1 \le rk([A|\underline{b}]) \le \min(3,m)$, $rk(A) \le rk([A|\underline{b}]) \le rk(A)+1$
- Nel piano ogni equazione di S può essere pensata come l'equazione di una retta
  - Sia $rk([A|\underline{b}])=3$ allora $m \ge 3$ e $rk(A)=2$, il sistema è impossibile: due delle rette non sono parallele e si incontrano in un punto P ed una delle altre rette non appartiene al fascio di sostegno P.
  - Sia $rk([A|\underline{b}])=2$ allora $m \ge 2$ e $rk(A)=2$ o $rk(A)=1$
    - Se $rk(A)=2$ il sistema è determinato: due rette si incontrano in un punto P (le cui coordinate sono la soluzione del sistema S) e le eventuali altre rette appartengono al fascio con sostegno P;
    - se $rk(A)=1$ le rette sono tutte fra loro parallele e non tutte coincidenti.
  - Sia $rk([A|b])=1$ allora $rk(A)=1$, il sistema è possibile ma indeterminato: le rette coincidono con una stessa retta r e le ∞^1 soluzioni del sistema sono le equazioni parametriche di r.

Interpretazione geometrica di sistemi con 2 incognite

Sia S un sistema lineare di m equazioni in 2 incognite di forma $A\underline{x}=\underline{b}$ (quindi valgono le limitazioni precedenti per rk(A) e rk([A|$\underline{b}$])

- Nello spazio ogni equazione di S può essere pensata come l'equazione di un piano parallelo all'asse z.
  - Sia rk([A|b])=3 allora m≥3 e rk(A)=2, il sistema è impossibile: due piani non sono paralleli e si intersecano lungo una retta r (parallela all'asse z) ed un altro almeno non appartiene al fascio di sostegno r
  - Sia rk([A|b])=2 allora m≥2 e rk(A)=2 o rk(A)=1
    - Se rk(A)=2 il sistema è determinato: i piani appartengono ad uno stesso fascio con sostegno la retta di equazioni $x=x_0, y=y_0$ ove $[x_0,y_0]_T$ è la soluzione di S;
    - se rk(A)=1 il sistema è impossibile : i piani sono piani fra loro paralleli e non tutti coincidenti.
  - Sia rk([A|b])=1 allora rk(A)=1, il sistema è possibile ma indeterminato: i piani coincidono con un piano π parallelo all'asse z e quindi le ∞^1 soluzioni del sistema rappresentano un piano (in quanto è sottinteso un secondo parametro z=k).

Interpretazione geometrica di sistemi con 3 incognite

Sia S un sistema lineare di m equazioni in 3 incognite di forma A$\underline{x}$=$\underline{b}$

- 1≤rk(A)≤min(3,m), 1≤rk([A|$\underline{b}$])≤min(4,m), rk(A)≤rk([A|$\underline{b}$])≤rk(A)+1
- Ogni equazione di S può essere pensata come l'equazione di un piano nello spazio
  - Sia rk([A|b])=4 allora m≥4 e rk(A)=3. S è un sistema impossibile: tre equazioni sono equazioni di piani appartenenti ad una stessa stella e c'è almeno un piano che non appartiene alla stella (ovvero non passa per il punto comune ai primi tre).
  - Sia rk([A|b])=3 allora m≥3 e rk(A)=3 o rk(A)=2.
    - Se rk(A)=3 S è un sistema possibile e determinato : i piani rappresentati dalle equazioni hanno uno e un solo punto comune (cioè appartengono ad una stessa stella di piani e almeno tre di essi sono a due a due distinti);
    - Se rk(A)=2 S è un sistema impossibile: due equazioni rappresentano piani non paralleli che quindi individuano una retta r, i restanti piani sono paralleli ad r (perché se uno non fosse parallelo ad r, avrebbe un punto in comune coi due piani precedenti e si avrebbe rk(A)=3) ed uno almeno di essi non contiene r
  - Sia rk([A|b])=2, allora m≥2 e rk(A)=2 o rk(A)=1.
    - Se rk(A)=2 S è un sistema possibile ma indeterminato che ammette ∞^1 soluzioni: tutte le equazioni rappresentano piani appartenenti ad uno stesso fascio la cui retta sostegno ha equazioni parametriche date dalle soluzioni del sistema S
    - Se rk(A)=1 S è un sistema impossibile: le equazioni rappresentano piani fra loro paralleli di cui due almeno distinti.
  - Sia rk([A|b])=1, allora rk(A)=1, S è un sistema possibile ma indeterminato le cui soluzioni dipendono da 2 parametri: i piani coincidono con uno stesso piano π, le ∞^2 soluzioni del sistema sono le equazioni parametriche di π.

Sommario

Abbiamo imparato:

- cos'è il rango di una matrice;
- Il teorema di Rouché-Capelli;
- come usare l'eliminazione gaussiana per risolvere un sistema possibile;
- come interpretare geometricamente i sistemi lineari con 2 o 3 incognite.