Esame di Geometria e Algebra Lineare **Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Appello 10 Luglio 2015**		
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Date orale: | 13/7 | 17/7 | 23/7 |

Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.

1. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ k-1 & 0 & k+1 \end{pmatrix}.$$

   1. Determinare per quali valori del parametro k la matrice A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
   2. Esistono valori di k per cui A è ortogonalmente diagonalizzabile? In caso affermativo trovare una matrice Q ortogonale che diagonalizza A.

SOLUZIONE

1. Calcoliamo gli autovalori di A:
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & k & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ k-1 & 0 & k+1-\lambda \end{vmatrix} = (k+1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - k]$$
da cui $\lambda_1 = k+1, \lambda_2 = 1-\sqrt{k}, \lambda_3 = 1+\sqrt{k}$. Poiché si vuole diagonalizzare A in $\mathbb{R}$, gli autovalori devono essere reali e quindi $k \geq 0$. Inoltre $\lambda_1 = \lambda_2$ implica $k = 0$, $\lambda_1 = \lambda_3$ implica $k = 0$ o $k = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3$ implica $k = 0$.
Quindi per $k > 0$ e $k \neq 1$ la matrice A ha 3 autovalori reali e distinti e quindi è diagonalizzabile.
Per $k = 0$ si ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, quindi A ha solo l'autovalore 1 con molteplicità algebrica 3, essendo
$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
la molteplicità geometrica di 1 è 2 e quindi A non è diagonalizzabile.
Per $k = 1$ si ha
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
e dunque A è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$, essendo una matrice reale simmetrica. In conclusione A è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$ per tutti i $k > 0$.

2. Per il teorema spettrale A è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se è simmetrica ed A è simmetrica se e solo se $k = 1$. In tal caso gli autovalori di A sono 0 con molteplicità algebrica 1 e 2 con molteplicità algebrica 2. Gli autovalori associati all'autovalore 0 sono le autosoluzioni del sistema
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
quindi sono $[h, -h, 0]^T$ con $h \neq 0$ e un autovettore di norma 1 è $[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0]^T$. Gli autovalori associati all'autovalore 2 sono le autosoluzioni del sistema
$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

quindi sono $[h, h, s]^T$ con h ed s non contemporaneamente nulli. Due autovettori mutuamente ortogonali sono $[1, 1, 0]^T$ e $[0, 0, 1]^T$. Tali autovettori sono ortogonali anche agli autovettori relativi all'autovalore 0. Normalizzaimo questi vettori ottenendo $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0]^T$ e $[0, 0, 1]^T$, perciò

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è una matrice ortogonale che diagonalizza A.

2. Sia data la matrice
$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix},$$
e si definisca su $\mathbb{R}^3$ l'operazione tra vettori
$$\langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \rangle = \mathbf{v_1}^T \cdot G \cdot \mathbf{v_2}.$$

1. Provare che l'operazione così definita è un prodotto scalare.
2. Trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto dato.
3. Verificare che l'operazione in $\mathbb{R}_2[x]$ definita da
$$\langle P(x), Q(x) \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$$
è un prodotto scalare e (facoltativo) che tale prodotto si può scrivere nella forma $\mathbf{v_1}^T \cdot G \cdot \mathbf{v_2}$ quando si prende come base di $\mathbb{R}_2[x]$ la base canonica.

SOLUZIONE

1. L'operazione $\langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \rangle$ restituisce sempre un numero reale. Verifichiamo che $\langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \rangle$ gode della proprietà commutativa. Infatti $\langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1} \rangle = \mathbf{v_2}^T \cdot G \cdot \mathbf{v_1} = (\mathbf{v_2}^T \cdot G \cdot \mathbf{v_1})^T = \mathbf{v_1}^T \cdot G^T \cdot \mathbf{v_2}$, da cui, essendo G simmetrica, si ottiene $\langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1} \rangle = \langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \rangle$.
Proviamo ora che l'operazione è lineare a sinistra; infatti per ogni coppia di numeri reali t_1, t_2 e per ogni terna di vettori $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ si ha $\langle t_1\mathbf{v_1} + t_2\mathbf{v_2}, \mathbf{v_3} \rangle = (t_1\mathbf{v_1} + t_2\mathbf{v_2})^T G\mathbf{v_3} = (t_1\mathbf{v_1}^T + t_2\mathbf{v_2}^)TG\mathbf{v_3} = t_1(\mathbf{v_1}^T G\mathbf{v_3}) + t_2(\mathbf{v_2}^T G\mathbf{v_3}) = t_1\langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_3} \rangle + t_2\langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3} \rangle$.
Proviamo infine la positività dell'operazione, $\langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_1} \rangle = \mathbf{v_1}^T G\mathbf{v_1}$ è una forma quadratica. I minori principali di NO della matrice G sono $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{15}$ e sono tutti positivi, dunque la forma quadratica è definita positiva da cui si deduce subito la positività dell'operazione. Pertanto l'operazione è un prodotto scalare.

2. Consideriamo la base canonica $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ di $\mathbb{R}^3$. Applichiamo l'algoritmo di Gram Schmidt a questa base, usando il prodotto scalare precedentemente definito e troviamo una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$. Abbiamo quindi
$\mathbf{b_1} = \mathbf{e_1}$,
$\mathbf{b_2} = \mathbf{e_2} - \frac{\langle \mathbf{e_2}, \mathbf{b_1} \rangle}{\|\mathbf{b_1}\|}\mathbf{b_1}$ da cui, essendo $\langle \mathbf{e_2}, \mathbf{b_1} \rangle = 0$, si ha $\mathbf{b_2} = \mathbf{e_2}$ e
$\mathbf{b_3} = \mathbf{e_3} - \frac{\langle \mathbf{e_3}, \mathbf{b_1} \rangle}{\|\mathbf{b_1}\|}\mathbf{b_1} - \frac{\langle \mathbf{e_3}, \mathbf{b_2} \rangle}{\|\mathbf{b_2}\|}\mathbf{b_2}$, da cui, essendo $\langle \mathbf{e_3}, \mathbf{b_1} \rangle = \frac{1}{3}$, $\|\mathbf{b_1}\| = \sqrt{\langle \mathbf{b_1}, \mathbf{b_1} \rangle} = 1$ e $\langle \mathbf{e_3}, \mathbf{b_2} \rangle = 0$, si ottiene $\mathbf{b_3} = [0, -\frac{1}{3}, 1]^T$.
I vettori $\{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}\}$ sono dunque una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$. Il vettore $\mathbf{b_1}$ ha norma 1. La norma di $\mathbf{b_2}$ è $\sqrt{\langle \mathbf{b_2}, \mathbf{b_2} \rangle} = \frac{1}{3}$ e quella di $\mathbf{b_3}$ è $\sqrt{\langle \mathbf{b_3}, \mathbf{b_3} \rangle} = \sqrt{\frac{32}{135}}$. Una base ortonormale è dunque $\{\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}, \mathbf{q_3}\}$ con $\mathbf{q_1} = \mathbf{b_1}, \mathbf{q_2} = [0, \frac{1}{3}, 0]^T, \mathbf{q_3} = [0, -\sqrt{\frac{15}{32}}, \sqrt{\frac{135}{32}}]$.

3. Un integrale definito di un polinomio è sempre un numero reale. Essendo il prodotto di polinomi commutativo, l'operazione in $\mathbb{R}_2[x]$ definita da
$$\langle P(x), Q(x) \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$$
gode della proprietà commutativa e è lineare a sinistra perché l'integrale è un operatore lineare. Il quadrato di un polinomio $P(x)$ inoltre è una funzione sempre maggiore o uguale a zero ed è il polinomio 0 se e solo se $P(x) = 0$ pertanto vale anche la proprietà di positività e quindi l'operazione introdotta è un prodotto scalare in $\mathbb{R}[x]$.
Ogni prodotto scalare su un spazio di dimensione finita si può scrivere nella forma $\mathbf{v_1}^T \cdot C \cdot \mathbf{v_2}$ ove C è la matrice dei coefficienti di Fourier dei vettori della base. Nel nostro caso dunque $c_{11} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx = 1, c_{12} = c_{21} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} xdx = 0, c_{13} = c_{31} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{1}{3}, c_{22} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{1}{3}, c_{23} = c_{32} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^3dx = 0, c_{33} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^4dx = \frac{1}{5}$ quindi si ha $C = G$.

3. Fissato un sistema di riferimento nello spazio, siano

$$Q = (1,\ 0,\ 0), \qquad \pi:\ x - y + 1 = 0.$$

   1. Trovare il luogo $\mathcal{S}$ dei punti P che soddisfano $d(P, \pi) = \frac{1}{2} d(P, Q)$.
   2. Classificare e trovare una forma canonica di $\mathcal{S}$.
   3. Trovare la rototraslazione del sistema di riferimento necessaria a porre $\mathcal{S}$ in forma canonica.

SOLUZIONE

1. Sia $P = (x, y, z)$ un generico punto dello spazio, si ha $d(P, \pi) = \frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}}$ e $d(P, Q) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$, dunque l'equazione di $\mathcal{S}$ è $\frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$, da cui elevando al quadrato si ottiene $2(x^2+y^2-2xy+2x-2y+1) = x^2-2x+1+y^2+z^2$, ovvero $x^2-4xy+y^2-z^2+6x-4y+1 = 0$.

2. Il luogo $\mathcal{S}$ è dunque una quadrica a cui sono associate le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Calcoliamo gli autovalori di A.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 4]$$

   da cui si ottiene $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 3$. Inoltre si ha

$$B = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + 12 + 12 - 9 - 4 - 4) = -8.$$

   Una forma canonica di $\mathcal{S}$ è allora $-x^2 - y^2 + 3z^2 - \frac{8}{3} = 0$ e la quadrica $\mathcal{S}$ è un iperboloide ellittico di rotazione, in quanto ha due autovalori non nulli uguali.

3. Il centro C della quadrica $\mathcal{S}$ ha coordinate date dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x - 2y = -3 \\ -2x + y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

   quindi $C = (-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 0)$. Per trovare la rotazione cerchiamo la matrice ortogonale con determinante 1 che diagonalizza A. Cerchiamo quindi gli autovettori di A associati all'autovalore -1 che risultano essere $[t, t, s]^T$ con t, s non contemporaneamente nulli. Due vettori ortogonali di norma 1 associati all'autovalore 1 sono allora $[0, 0, 1]^T, [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0]^T$. Gli autovettori associati all'autovalore 3, risultano essere $[h, -h, 0]^T$ con $h \neq 0$, quindi $[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0]^T$ è un autovettore di norma 1 associato all'autovalore 3 ed ovviamente ortogonale ad ogni autovettore associato all'autovalore -1. La matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   diagonalizza ortogonalmente A ma ha determinante uguale a -1, bisogna quindi cambiare i segni di una colonna per ottenere la matrice di rotazione

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & +\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per portare la quadrica alla forma canonica scritta, dobbiamo quindi fare prima una traslazione che porti C in O, tale traslazione è

$$\begin{cases} x = x' - \frac{1}{3} \\ y = y' + \frac{4}{3} \\ z = z' \end{cases}$$

successivamente dobbiamo fare la rotazione $[x', y', z']^T = R[X, Y, X]^T$ quindi la trasformazione è $[x, y, z]^T = R[X, Y, X]^T + [\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, 0]^T$.

4. Siano

$$\mathbf{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$f(\mathbf{b_1}) = \mathbf{b_1} - 2\mathbf{b_2} - \mathbf{b_3}, \qquad f(\mathbf{b_2}) = 2\mathbf{b_1} + 3\mathbf{b_2}, \qquad f(\mathbf{b_3}) = 3\mathbf{b_1} + \mathbf{b_2} - \mathbf{b_3}.$$

1. Dimostrare che $\mathcal{B} = \{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e scrivere la matrice che rappresenta l'applicazione rispetto a $\mathcal{B}$.
2. Si trovi una base di $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.
3. Trovare le controimmagini rispetto a f del vettore $\mathbf{v} = \mathbf{b_1} + 5\mathbf{b_2} + \mathbf{b_3}$.

SOLUZIONE

1. Essendo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

i vettori $\{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}\}$ sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di $\mathbb{R}^3$. La matrice che rappresenta l'applicazione f rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Una base di $\mathrm{Im}(f)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ è $\{[1,-2,-1]^T, [2,3,0]^T\}$ e quindi rispetto alla base canonica è $\{\mathbf{b_1} - 2\mathbf{b_2} - \mathbf{b_3}, 2\mathbf{b_1} + 3\mathbf{b_2}\} = \{[-1,1,-3]^T, [5,4,3]^T\}$. $\ker(f)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ è$\{[h,-h,h]^T\}$ quindi una sua base è $\{[1,-1,1]^T\}$, che usando invece come base di $\mathbb{R}^3$ la base canonica diventa $\{\mathbf{b_1} - \mathbf{b_2} + \mathbf{b_3}\} = \{[0,3,0]^T\}$.

3. Il vettore $\mathbf{v} = \mathbf{b_1} + 5\mathbf{b_2} + \mathbf{b_3}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ è rappresentato da $[1,5,1]^T = f(\mathbf{b_2}) - f(\mathbf{b_1})$, una sua controimmagine è quindi $\mathbf{b_2} - \mathbf{b_1} = [0,-2,1]^T$. Tutte le controimmagini si ottengono allora aggiungendo a $[0,-2,1]^T$ i vettori del nucleo (rispetto alla base $\mathcal{B}$) e sono quindi $[h, -2-h, 1+h]^T$. Le controimmagini rispetto alla base canonica sono allora $\{h\mathbf{b_1} - (2+h)\mathbf{b_2} + (1+h)\mathbf{b_3}\}$. Altrimenti si trova la matrice A che rappresenta f rispetto alla base canonica (col cambiamento di base) e poi si calcolano $kerA$ e $ColA$ e le relative basi.