

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE

Politecnico di Milano – Ingegneria informatica e comunicazioni – 14 gennaio 2019 – II prova in itinere

Cognome:	Nome:	Matricola:
----------	-------	------------

Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. I compiti privi di indicazione leggibile di nome e cognome non verranno corretti. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

1. Sia $f_h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare dipendente dal parametro reale h definita da

$$f_h(x, y, z) = (2x + hy + z, 2y, hx + hy + z).$$

- Dire per quali $h \in \mathbb{R}$ l'applicazione f_h è diagonalizzabile.
- Per $h = 6$, determinare una base \mathcal{B} di \mathbb{R}^3 composta da autovettori di f_6 e scrivere la matrice rappresentativa di f_6 rispetto a \mathcal{B} .
- Sia A la matrice rappresentativa di f_0 rispetto alla base canonica, stabilire se A è simile alla matrice

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

- L'applicazione f_h ha come matrice rappresentativa rispetto alla base canonica

$$A_h = \begin{bmatrix} 2 & h & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ h & h & 1 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A_h è $(2 - \lambda)[(2 - \lambda)(1 - \lambda) - h] = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2 - h)$. Gli autovalori sono pertanto $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \frac{3 + \sqrt{1+4h}}{2}, \lambda_3 = \frac{3 - \sqrt{1+4h}}{2}$, affinché siano reali deve essere $h \geq -\frac{1}{4}$. Si ha subito che $\lambda_2 = \lambda_3$ se $h = -\frac{1}{4}$, $\lambda_1 = \lambda_2$ se $h = 0$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$ per ogni valore di h . Pertanto se $h \geq -\frac{1}{4}$ e $h \neq 0$, la matrice A_h e quindi l'applicazione f_h , è diagonalizzabile.

Per $h = -\frac{1}{4}$, gli autovalori sono 2 con molteplicità algebrica 1 e $\frac{3}{2}$ con molteplicità algebrica 2. L'autovalore 2 è regolare, il rango di

$$A_{-\frac{1}{4}} - \frac{3}{2}I = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

è 2 quindi la molteplicità geometrica di $\frac{3}{2}$ è 1 e l'autovalore non è regolare per cui per $h = -\frac{1}{4}$ la matrice e quindi l'applicazione non è diagonalizzabile.

Per $h = 0$ gli autovalori sono 2 con molteplicità algebrica 2 e l'autovalore semplice (e quindi regolare) 1. Il rango della matrice

$$A_0 - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

è 1 quindi la molteplicità geometrica di 2 è 2 e l'autovalore è regolare per cui per $h = 0$ la matrice e quindi l'applicazione è diagonalizzabile.

In conclusione f_h non è diagonalizzabile se e solo se $h \leq -\frac{1}{4}$.

- Per $h = 6$, gli autovalori di A_6 sono 2, 4, -1. Un autovettore relativo all'autovalore 2 è $[2, -1, 6]^T$, un autovettore relativo all'autovalore 4 è $[1, 0, 2]^T$, un autovettore relativo all'autovalore -1 è $[-1, 0, 3]^T$ ed essendo associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti e quindi sono una base di \mathbb{R}^3 composta da autovettori di f_6 e quindi la matrice rappresentativa di f_6 rispetto a tale base è $\text{diag}(2, 4, -1)$.
- Abbiamo già visto nel primo punto che la matrice $A = A_0$ rappresentativa di f_0 rispetto alla base canonica, è diagonalizzabile e ha come autovalori 2 con molteplicità algebrica e geometrica 2 e l'autovalore semplice 1. La matrice

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ha pure come autovalori 2 con molteplicità algebrica 2 e l'autovalore semplice 1, ma 2 ha molteplicità geometrica 1 infatti il rango di

$$M - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

è 2. Poiché due matrici simili devono avere gli stessi autovalori con la stessa molteplicità geometrica A e M non sono simili.

2. Nel piano si consideri la conica $\gamma_h : x^2 - 2hxy + 2hy^2 - 4x + 2hy = 0$, dipendente dal parametro reale h .

- Classificare γ_h al variare di $h \in \mathbb{R}$.
- Verificare che per $h = 2$ la conica ammette un solo asse di simmetria e calcolare l'angolo formato da tale asse e l'asse delle ascisse.
- Verificare che per $h = -1$ la conica ammette due vertici reali e calcolare l'eventuale centro di simmetria della conica.

Soluzione

- Gli invarianti di γ_h sono $I_1 = 1 + 2h$,

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & -h \\ -h & 2h \end{vmatrix} = 2h - 2h^2,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -h & -2 \\ -h & 2h & h \\ -2 & h & 0 \end{vmatrix} = 3h^2 - 4h.$$

Quindi $I_3 = 0$ se $h = 0$ o $h = \frac{4}{3}$, $I_2 = 0$ per $h = 0$ o $h = 2$, $I_2 > 0$ per $0 < h < 2$, $I_2 < 0$ per $h < 0$ o $h > 2$, $I_1 = 0$ per $h = -\frac{1}{2}$. Pertanto per $h < 0$ o $h > 2$ la conica è una iperbole che per $h = -\frac{1}{2}$ è equilatera; per $h = 0$ la conica è spezzata in due rette reali parallele (precisamente $x = 0$ e $x = 4$), per $0 < h < 2$ è una ellisse che per $h = \frac{4}{3}$ si spezza in due rette immaginarie coniugate e per $h > \frac{4}{3}$ è immaginaria; per $h = 2$ è una parabola.

- Come già visto dal punto precedente per $h = 2$ la conica è una parabola e quindi ammette un solo asse di simmetria. Si può vedere subito che l'asse della parabola è parallela alla retta $x + 2y = 0$ in quanto il complesso dei termini quadratici dell'equazione della parabola è $(x - 2y)^2$ oppure si cerca la direzione dell'autovettore associato all'autovalore nullo di

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix},$$

che è $[2, 1]^T$ ed è la direzione dell'asse della parabola. L'angolo formato da tale asse e l'asse delle ascisse risulta quindi $\arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$.

- Dal primo punto sappiamo che per $h = -1$ la conica è una iperbole e come tale interseca uno e uno solo dei suoi assi di simmetria ed ammette quindi due e due soli vertici reali. Il centro di simmetria della conica è il punto di coordinate $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.

3. Nello spazio si consideri la retta $s : y = x + z = 0$.

- Sia π il piano ortogonale ad s e contenente l'origine. Scrivere una base ortonormale di π .
- Sia r la retta parallela ad s e contenente $Q = (0, 1, 0)$. Determinare il luogo Ω dei punti di \mathbb{R}^3 a distanza 1 da r e verificare che Ω è una quadrica di rotazione.
- Sia $\gamma = \Omega \cap \pi$. Calcolare l'equazione del cilindro Γ avente generatrice parallela all'asse x e direttrice γ .

Soluzione

- Il piano π ha equazione $x - z = 0$ e rappresenta un sottospazio di dimensione 2 di \mathbb{R}^3 . I vettori del sottospazio π sono del tipo $\{[h, k, h]^T | h, k \in \mathbb{R}\}$, una base del sottospazio è quindi $\{[1, 0, 1]^T, [0, 1, 0]^T\}$ che è già una base ortogonale. Una base ortonormale è allora $\{[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}]^T, [0, 1, 0]^T\}$.
- La retta r ha equazioni $x + z = 0, y = 1$. Sia $P = (x_0, y_0, z_0)$ un generico punto dello spazio, il piano per P perpendicolare ad r ha equazione $x - z - x_0 + z_0 = 0$ e incontra la retta r nel punto $Q = (\frac{x_0 - z_0}{2}, 1, \frac{z_0 - x_0}{2})$, la distanza di P da r è la distanza di P da Q e risulta $\sqrt{(\frac{x_0 + z_0}{2})^2 + (y_0 - 1)^2 + (\frac{x_0 - z_0}{2})^2}$. Il luogo Ω dei punti di \mathbb{R}^3 a distanza 1 da r risulta dunque avere equazione $2(\frac{x+z}{2})^2 + (y-1)^2 = 1$, cioè $x^2 + 2y^2 + 2xz + z^2 - 4y = 0$. Dalla definizione di Ω è evidente che Ω è il luogo delle rette parallele ad r e a distanza 1 da tale retta e quindi è un cilindro circolare retto formato dalla rotazione attorno ad r di una retta ad essa parallela e a distanza 1, perciò è una quadrica di rotazione. Questo fatto si poteva verificare anche osservando che la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ha autovalori 0 con molteplicità algebrica 1 e 2 con molteplicità algebrica 2.

- Le equazioni della curva $\gamma = \Omega \cap \pi$ sono $x^2 + 2y^2 + 2xz + z^2 - 4y = x - z = 0$. Il cilindro Γ avente generatrice parallela all'asse x e direttrice γ si ottiene eliminando x tra tali equazioni ed ha dunque equazione $2y^2 + 4z^2 - 4y = 0$.