Durata: 1h30'

Esame di Geometria e Algebra Lineare

Politecnico di Milano – Ingegneria informatica e comunicazioni – 5 novembre 2018

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. I compiti privi di indicazione leggibile di nome e cognome non verranno corretti. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

1. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ si considerino i piani

$$\begin{aligned} \pi_1 &: x - y + z = -1, \\ \pi_2 &: x + (h-1)y + (1-h)z = 3h - 3, \\ \pi_3 &: y - (h-1)z = h, \end{aligned}$$

dove h è un parametro reale.

(a) Stabilire, al variare di h, la posizione reciproca dei tre piani.

(b) Per $h = 3$ trovare il punto P intersezione dei tre piani.

(c) Verificare che per $h = 2$ i tre piani appartengono al medesimo fascio proprio, trovare la retta sostegno del fascio e la sua parallela passante per il punto P.

Soluzione

(a) Consideriamo il sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite formato dalle equazioni dei tre piani. La matrice dei coefficienti ha determinante $-h^2 + 2h$, pertanto per $h \neq 0, 2$ il sistema ammette una e una sola soluzione , i tre piani appartengono ad una stella il cui centro è il punto che ha per coordinate la soluzione del sistema. Per $h = 0$ i piani π_1 e π_2 sono paralleli e distinti e il terzo piano li interseca secondo due rette parallele e distinte (infatti la matrice dei coefficienti ha rango 2, quella completa ha rango 3 ed il sistema è impossibile) . Per $h = 2$ la matrice dei coefficienti e la matrice completa hanno entrambe rango 2 il sistema ammette ∞^1 soluzioni e i tre piani appartengono ad uno stesso fascio (si verifica facilmente che l'equazione di π_1 è una combinazione lineare delle equazioni di π_2 e π_3 con coefficienti della combinazione 1 e -2).

(b) Per $h = 3$ la soluzione del sistema è $x = \frac{4}{3},\ y = \frac{11}{3},\ z = \frac{4}{3}$.

(c) Abbiamo già verificato al punto 1, che per $h = 2$ i tre piani appartengono ad un fascio la cui retta è l'intersezione dei piani π_2 e π_3 ed ha quindi parametri direttori $0, 1, 1$. La retta cercata ha dunque equazioni parametriche $x = \frac{4}{3},\ y = \frac{11}{3} + t,\ z = \frac{4}{3} + t$, le equazioni cartesiane sono quindi $x = \frac{4}{3},\ 3y - 3z = 7$. Notate che si potevano trovare direttamente le equazioni cartesiane come intersezioni di due piani paralleli a π_2 e π_3 passanti per P.

2. Nello spazio $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori $u_1 = [-1, 2, -1, 2]^T$, $u_2 = [-1, 0, -1, 0]^T$ ed $u_3 = [2, 2, 2, 2]^T$.

   (a) Determinare una base e la dimensione del sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ tale che $U = \mathcal{L}(u_1, u_2, u_3)$.

   (b) Determinare una base e la dimensione del sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus V = \mathbb{R}^4$. Scrivere le equazioni di V.

   (c) Determinare una base e la dimensione di un sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ tale che $U + W = \mathbb{R}^4$ ed $U \cap W = \mathcal{L}(u_3)$. Scrivere le equazioni di W.

   Soluzione

   (a) Si verifica facilmente che $u_3 = u_1 + 3u_2$ pertanto i vettori u_1, u_2 sono una base di U che ha dimensione 2.

   (b) Per verificare le condizioni date, lo spazio V deve avere dimensione 2 in quanto $\dim(U + V) = 4$ e $\dim(U \cap V) = 0$. Una base di V si può trovare facilmente come insieme di vettori che completano la base di U ad una base di $\mathbb{R}^4$. Si verifica con conti immediati che $\{u_1, u_2, e_1, e_2\}$ sono una base di $\mathbb{R}^4$. Pertanto lo spazio $V = \mathcal{L}(e_1, e_2)$ soddisfa le condizioni richieste, le sue equazioni cartesiane sono allora $z = 0, v = 0$.

   (c) Per verificare le condizioni date, $\dim(W) = 3$. Prendiamo $W = \mathcal{L}(u_3, e_1, e_2)$. W ha dimensione 3, poiché $u_3 \in U$ e $u_3 \in W$, $\mathcal{L}(u_3)$ è sottospazio di $U \cap W$, ma $\dim(U = 2)$, $\dim W = 3$ e $\dim(U + W) = 4$, dunque $\dim(U \cap W) = 1$ e $U \cap W = \mathcal{L}(u_3)$. A questo punto il generico vettore di W ha la forma $w = [2a + b, 2a + c, 2a, 2a]^T$ con a, b, c parametri reali e la equazione cartesiana di W è $z + v = 0$.

3. Fissata in $\mathbb{R}^3$ la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, si considerino i seguenti vettori

$$v'_h = (2h-1)e_1 - e_2 + he_3, \qquad v''_h = he_1 + (h+1)e_3, \qquad v'''_h = (h-1)e_1 + he_3,$$
$$w'_h = (h-1)e_1 + (h-1)e_2 + (h-1)e_3, \qquad w''_h = (h-1)e_1 + e_2, \qquad w'''_h = (h-2)e_1 + (h-1)e_3,$$

dove h è un parametro reale.

(a) Determinare per quali valori di h esiste ed è unica l'applicazione lineare f_h tale che

$$f(v'_h) = w'_h,$$
$$f(v''_h) = w''_h,$$
$$f(v'''_h) = w'''_h.$$

Stabilire poi per quali valori di h l'applicazione lineare è suriettiva.

(b) Per $h = 0$ scrivere la matrice rappresentativa dell'applicazione lineare rispetto alla base canonica. Verificare l'invertibilità di tale applicazione lineare.

(c) Per $h = 1$, determinare la dimensione di nucleo ed immagine, e scrivere una base per ognuno dei due sottospazi.

Soluzione

(a) L'applicazione esiste ed è unica se i vettori v'_h, v''_h, v'''_h sono una base di $\mathbb{R}^3$. La matrice le cui colonne sono le componenti di questi vettori è

$$\begin{pmatrix} 2h-1 & h & h-1 \\ -1 & 0 & 0 \\ h & h+1 & h \end{pmatrix},$$

ed ha determinante 1, pertanto l'applicazione esiste ed è unica per ogni valore di h. i vettori w'_h, w''_h, w'''_h generano $\mathrm{Im}(f)$ per cui l'applicazione è suriettiva se e solo se tali vettori sono una base di $\mathbb{R}^3$. La matrice le cui colonne sono le componenti di questi vettori è

$$\begin{pmatrix} h-1 & h-1 & h-2 \\ h-1 & 1 & 0 \\ h-1 & 0 & h-1 \end{pmatrix},$$

il cui determinante è $(h-1)^2(h-2)$ quindi l'applicazione è suriettiva per $h \neq 1, 2$.

(b) Per $h = 0$ sappiamo che l'applicazione è invertibile in quanto è suriettiva ed essendo un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$. è anche iniettiva e pertanto biunivoca. Abbiamo

$$v'_0 = -e_1 - e_2, \qquad v''_0 = -e_3, \qquad v'''_0 = -e_1,$$
$$w'_0 = -e_1 - e_2 - e_3, \qquad w''_0 = -e_1 + e_2 + e_3, \qquad w'''_0 = -2e_1 - e_3,$$

da questo ricaviamo $e_1 = -v''''_0$, $e_2 = v'_0 - v'''_0$, $e_3 = -v''_0$, da cui $f(e_1) = 2e_1 + e_3$, $f(e_2) = -e_1 - e_2 - e_3 + 2e_1 + e_3 = e_1 - e_2$, $f(e_3) = e_1 - e_2 - e_3$. la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica è dunque

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

il suo determinante è 2 e questo conferma che l'applicazione è invertibile.

(c) Per $h = 1$, si ha $w'_1 = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$, $w''_0 = e_2$, $w'''_0 = -2e_1$, tali vettori generano l'immagine di f che quindi ha come base $\{e_1, e_2\}$ ed ha dimensione 2, il ker ha quindi dimensione 1 e un vettore non nullo del ker è v'_0 in quanto $f(v'_0-) = w'_0 = 0$.