Esame di Geometria e Algebra Lineare		
Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Appello 22 Luglio 2015		
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Date orale:

22/7	23/7	24/7	27/7

Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.

1. Sia $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ la funzione tale che

$$T(1) = 1 + x, \quad T(1 + x) = x + x^2, \quad T(1 + x + x^2) = 1 + 2x + x^2, \quad T(1 + x + x^2 + x^3) = 1 - x^2.$$

1. Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_3[x])$ che soddisfa le condizioni precedenti e calcolare la matrice A che rappresenta T rispetto alla base canonica $S = \{1, x, x^2, x^3\}$.
2. Calcolare una base di $\ker(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.
3. Calcolare una base di $\ker(T) + \mathrm{Im}(T)$ e $\ker(T) \cap \mathrm{Im}(T)$.

2. Siano date le matrici dipendenti dal parametro reale k:

$$A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & -k+1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k+1 & 1 \\ 0 & 0 & k-3 \end{pmatrix}.$$

1. Calcolare autovalori e autospazi di A_k per ogni $k \in \mathbb{R}$.
2. Per quali k le matrici A_k e B_k sono simili?

3. Fissato un sistema di riferimento ortonormale $\mathcal{B}_O$ nello spazio, consideriamo il fascio di quadriche $\mathcal{Q}_h$ definite dalle seguenti matrici dipendenti dal parametro $h \in \mathbb{R}$:

$$B_h = \begin{pmatrix} 1+h & 0 & 1-h & 0 \\ 0 & 5 & 0 & h \\ 1-h & 0 & 1+h & 0 \\ 0 & h & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Classificare $\mathcal{Q}_h$ al variare di h.

2. Scrivere una forma canonica di $\mathcal{Q}_h$ per ogni h.

3. Trovare i valori di h per i quali $\mathcal{Q}_h$ è di una superficie di rotazione reale. In tali casi trovare l'asse di rotazione di $\mathcal{Q}_h$.

Soluzioni

1. (a) L'insieme $\{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$ una base di $\mathbb{R}_3[x]$. Essendo pertanto definita l'azione di T su una base, esiste un'unica applicazione lineare T che soddisfa le condizioni date. Per ottenere la matrice che rappresenta T rispetto ad S dobbiamo conoscere l'azione di T su S :

$$\begin{array}{rcl} T(1) & = & 1+x, \\ T(x) & = & T(1+x)-T(1) = x+x^2-1-x = -1+x^2, \\ T(x^2) & = & T(1+x+x^2)-T(1+x) = 1+2x+x^2-x-x^2 = 1+x, \\ T(x^3) & = & T(1+x+x^2+x^3)-T(1+x+x^2) = 1-x^2-1-2x-x^2 = -2x-2x^2. \end{array}$$

Pertanto abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} T(1)|_S & T(x)|_S & T(x^2)|_S & T(x^3)|_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Se riduciamo a scala la matrice A otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \ker(A) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Attraverso la mappa delle coordinate, una base di $\ker(f)$ è $\{2x+2x^2+x^3, 1-x^2\}$. Inoltre, lo spazio delle colonne $C(A)$ ha per base le prime due colonne di A e quindi una base di $\mathrm{Im}(f)$ è $\{1+x, -1+x^2\}$.

(c) $\ker(f)+\mathrm{Im}(f) = \mathcal{L}(2x+2x^2+x^3, 1-x^2, 1+x, -1+x^2)$. Dobbiamo trovare un sottoinsieme massimale di generatori indipendenti. A tal fine riduciamo a scala la matrice delle coordinate rispetto a S :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo che i primi tre generatori sono tra loro indipendenti, pertanto una base di $\ker(f)+\mathrm{Im}(f)$ è $\{2x+2x^2+x^3, 1-x^2, 1+x\}$. Dalla formula di Grassman si ha

$$\dim(\ker(f)\cap\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\ker(f)) - \dim(\ker(f)+\mathrm{Im}(f)) = 1$$

ed è facile verificare che una base dell'intersezione è $\{1-x^2\}$.

2. (a) Il polinomio caratteristico di A_k è:

$$\begin{array}{rcl} P_k(\lambda) & = & \begin{vmatrix} k+1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & k-1-\lambda & -k+1 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \\ & = & (k+1-\lambda)((k-1-\lambda)(-2-\lambda)-2(-k+1)) = \\ & = & (k+1-\lambda)\lambda(3-k+\lambda) \end{array}$$

e quindi le sue radici sono $\lambda_1 = k+1,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = k-3.$

- Se $k \neq -1, 3$ gli autovalori sono tutti distinti e i corrispondenti autospazi hanno dimensione 1 :

$$V_{k+1} = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -k+1 \\ 0 & 2 & -k-3 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 0 & 2 & k-1 \\ 0 & 0 & -2k-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right),$$

$$V_0 = \ker \begin{pmatrix} k+1 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & -k+1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} k+1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

$$V_{k-3} = \ker \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -k+1 \\ 0 & 2 & -k+1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & k-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1-k \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

- Se $k = -1$ si ha $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e

$$V_0 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

- Se $k = 3$ si ha $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ e

$$V_0 = \ker \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

(b) B_k è una matrice triangolare alta e i suoi autovalori sono gli elementi sulla diagonale, che coincidono con gli autovalori di A_k.

- Per $k \neq -1, 3$ gli autovalori sono distinti e quindi entrambe le matrici sono diagonalizzabili alla medesima matrice diagonale. Da questo segue che le due matrici sono simili.
- Se $k = -1$ la matrice A_{-1} è diagonalizzabile. Dobbiamo studiare l'autospazio V_0 di B_{-1} :

$$V_0 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Segue che la molteplicità geometrica di 0 è uguale a 2 e quindi anche B_{-1} è diagonalizzabile e pertanto è simile ad A_{-1}.
- Se $k = 3$ la matrice A_3 non è diagonalizzabile. Dobbiamo studiare l'autospazio V_0 di B_3 :

$$V_0 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Segue che la molteplicità geometrica di 0 è uguale a 2 e quindi B_3 è diagonalizzabile e pertanto non è simile ad A_3.

3. (a) La classificazione di $\mathcal{Q}_h$ può essere compiuta utilizzando gli invarianti metrici delle quadriche:

$$I_1 = \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} 1+h & 0 & 1-h \\ 0 & 5 & 0 \\ 1-h & 0 & 1+h \end{pmatrix} = 7 + 2h,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 1+h & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+h & 1-h \\ 1-h & 1+h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1+h \end{vmatrix} = 2(5+7h),$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1+h & 0 & 1-h \\ 0 & 5 & 0 \\ 1-h & 0 & 1+h \end{vmatrix} = 5((1+h)^2 - (1-h)^2) = 20h,$$

$$I_4 = \begin{vmatrix} 1+h & 0 & 1-h & 0 \\ 0 & 5 & 0 & h \\ 1-h & 0 & 1+h & 0 \\ 0 & h & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1+h & 0 & 1-h \\ 0 & 5 & 0 \\ 1-h & 0 & 1+h \end{vmatrix} + h \begin{vmatrix} 1+h & 1-h & 0 \\ 0 & 0 & h \\ 1-h & 1+h & 0 \end{vmatrix} = 4h(5-h^2).$$

Segue che:

- $h > \sqrt{5}$: $I_4 < 0$, $I_2 > 0$, $I_1 I_3 > 0$ quindi $\mathcal{Q}_h$ è un'ellissoide reale;

- $h = \sqrt{5}:\ I_4 = 0,\ I_2 > 0,\ I_1 I_3 > 0$ quindi $\mathcal{Q}_h$ è un cono immaginario con vertice reale;
- $0 < h < \sqrt{5}:\ I_4 > 0,\ I_2 > 0,\ I_1 I_3 > 0$ quindi $\mathcal{Q}_h$ è un'ellissoide immaginario;
- $h = 0:\ I_4 = 0,\ I_2 > 0,\ I_1 I_3 > 0$ quindi $\mathcal{Q}_h$ è un cilindro ellittico (reale o immaginario);
- $-\sqrt{5} < h < 0:\ I_4 < 0,\ I_1 I_3 < 0$ quindi $\mathcal{Q}_h$ è un'iperboloide a due falde;
- $h = -\sqrt{5}:\ I_4 = 0,\ I_2 < 0$, quindi $\mathcal{Q}_h$ è un cono reale;
- $h < -\sqrt{5}:\ I_4 > 0,\ I_2 < 0$ quindi $\mathcal{Q}_h$ è un'iperboloide ad una falda.

(b) Calcoliamo il polinomio caratteristico della matrice dei termini di secondo grado:

$$P_h(\lambda) = \begin{vmatrix} 1+h-\lambda & 0 & 1-h \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 1-h & 0 & 1+h-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda)(2h-\lambda).$$

Gli autovalori sono quindi $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 2h$. Dal punto precedente, l'equazione canonica di $\mathcal{Q}_h$ è sempre del tipo

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \tilde{a}_{44} = 0.$$

Se $h \neq 0$ allora $\tilde{a}_{44} = \frac{I_4}{I_3} = 1 - \frac{h^2}{5}$ mentre se $h = 0$ si ha $\tilde{a}_{44} = 1$, perché la riduzione in forma canonica di $\mathcal{Q}_0$ avviene solo attraverso una rotazione del sistema di riferimento. Pertanto una forma canonica di $\mathcal{Q}_h$ è

$$5X^2 + 2Y^2 + 2hZ^2 + 1 - \frac{h^2}{5} = 0.$$

Si deduce quindi che $\mathcal{Q}_0$ è un cilindro immaginario.

(c) La quadrica $\mathcal{Q}_h$ è di rotazione soltanto se A_h ha due autovalori coincidenti, pertanto $h = 1, \frac{5}{2}$. Per $h = 1$ la quadrica non ha punti reali, mentre per $h = \frac{5}{2}$ abbiamo un'ellissoide reale di rotazione. Per trovare il suo asse di rotazione cerchiamo il centro di $\mathcal{Q}_{5/2}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7/2 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -5/2 \\ -3/2 & 0 & 7/2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad C|_{\mathcal{B}_O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'asse è parallelo all'autospazio V_2 :

$$V_2 = \ker \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & -3/2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Quindi una rappresentazione parametrica dell'asse è

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2} \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$