In pratica….

In pratica: Come procedere per stabilire se A è diagonalizzabile

Input: A matrice quadrata di ordine n sul campo reale R.
Output: A è o non è diagonalizzabile in R.

1. Calcolare gli autovalori di A (in C).
   a) Se non stanno tutti in R, allora A non è diagonalizzabile in R;
   b) altrimenti (tutti gli autovalori stanno in R),
2. Calcolare le molteplicità algebriche degli autovalori
   a) Se tutti gli autovalori hanno molteplicità algebrica 1 (ovvero se ci sono n autovalori reali e distinti), A è diagonalizzabile in R;
   b) altrimenti (ci sono alcuni autovalori con molteplicità algebrica maggiore di 1
3. Verificare se gli autovalori di molteplicità algebrica >1 sono regolari
   a) se tutti sono regolari A è diagonalizzabile in R;
   b) altrimenti (uno almeno non è regolare) A non è diagonalizzabile in R.

Nota: se si vuole stabilire se A è diagonalizzabile in C, il passo 1 è superfluo perché è noto che la matrice A ha n autovalori in C, i passi 2 e 3 procedono come sopra (sostituendo R con C).

Calcolo della matrice diagonale cui A è simile e della matrice di passaggio

Sia A una matrice quadrata di ordine n, diagonalizzabile in K. Siano $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ i suoi autovalori con molteplicità algebrica rispettivamente $h_1, h_2, \ldots, h_s$ (ove ovviamente $h_1+h_2+\ldots+h_s = n$)

- A è simile alla matrice diagonale che ha sulla diagonale principale gli elementi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ ripetuti rispettivamente $h_1, h_2, \ldots, h_s$ volte
- La matrice di passaggio P è ottenuta dall'accostamento di n autovettori linearmente indipendenti (ottenuti scegliendo h_1 autovettori linearmente indipendenti nell'autospazio di λ_1, h_2 autovettori linearmente indipendenti nell'autospazio di λ_2, …., h_s autovettori linearmente indipendenti nell'autospazio di λ_s) disposti in modo che per ogni $1 \leq i \leq n$ la colonna i-esima di P sia un autovettore associato all'autovalore che occupa il posto (i,i) della matrice diagonale.

Come procedere per stabilire se A e B sono simili

Input: A,B matrici quadrate di ordine n sul campo K

Output: A e B sono o non sono simili.

1. Se tr A ≠ tr B, A e B non sono simili; altrimenti tr A=trB e
2. se det A ≠ det B, A e B non sono simili; altrimenti det A=det B e
3. se rk A≠ rk B, A e B non sono simili; altrimenti rk A=rk B e
4. se det $(A-\lambda I) \neq$ det $(B-\lambda I)$, A e B non sono simili; altrimenti det $(A-\lambda I)$=det $(B-\lambda I)$ (quindi A,B hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicità algebrica) e
5. se esiste un autovalore le cui molteplicità geometriche come autovalore di A e come autovalore di B sono diverse, A e B non sono simili; altrimenti tutti gli autovalori hanno le stesse molteplicità geometriche rispetto ad A e rispetto a B e
6. se $n \leq 3$, A e B sono simili; altrimenti $n \geq 4$ e
   a. se A e B sono diagonalizzabili, A e B sono simili;
   b. se una è diagonalizzabile e l'altra no, A e B non sono simili;
   c. altrimenti A e B sono entrambe non diagonalizzabili e bisogna risolvere il sistema XA=BX e vedere se esistono soluzioni per cui det X≠0,
      1. se si, A e B sono simili,
      2. se no, non sono simili.

Endomorfismi semplici

<u>Problema iniziale</u>: Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n. Quando e come è possibile scegliere una base di V in modo che f sia rappresentato in modo ≪semplice≫?

<u>Risposta</u>: Sia *B* una base di V e sia A=$M_{B,B}$(f) la matrice che rappresenta f rispetto alla base *B*. Se A è diagonalizzabile e quindi V ha una base *C* di autovettori, $M_{C,C}(f) = diag(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$, ove λ_i è l'autovalore associato all'i-esimo vettore della base *C*.

- Se esiste una base di V rispetto alla quale f è rappresentato da una matrice diagonalizzabile allora f sarà rappresentato da una matrice diagonalizzabile rispetto ad ogni base di V, in particolare se f è rappresentabile rispetto a qualche base da una matrice diagonale, sarà rappresentato da una matrice diagonalizzabile rispetto ad una qualsiasi base.
- Diciamo quindi che un endomorfismo è *semplice* se rispetto ad una qualsiasi base di V è rappresentato da una matrice diagonalizzabile.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Alcune osservazioni

Sia A una matrice quadrata di ordine n su K e sia $\underline{v}$ un suo autovettore con autovalore associato λ.

- Per ogni m>0, $\underline{v}$ è un autovettore di A^m associato all'autovalore λ^m.
  - $A^m v = A^{m-1}Av = A^{m-1}\lambda v = \lambda A^{m-2}Av = \lambda A^{m-2}\lambda v = \lambda^2 A^{m-3}Av = \ldots\ldots$
- Se A è invertibile $\underline{v}$ è un autovettore di A^{-1} associato all'autovalore $1/\lambda$.
  - Se A è invertibile, det $A\neq 0$ e quindi tutti gli autovalori di A sono diversi da 0. Moltiplichiamo entrambi i membri dell'uguaglianza $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$ per $(1/\lambda)\, A^{-1}$ e otteniamo $(1/\lambda)\underline{v} = A^{-1}\underline{v}$.
- Sia $p(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$ un polinomio a coefficienti in K. Poniamo $p(A)= a_n A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\ldots+a_1 A+a_0 I_n$. $\underline{v}$ è un autovettore di p(A) associato all'autovalore $p(\lambda)$.
  Inoltre se A e B sono simili anche p(A) e p(B) sono simili.

Teorema di Cayley-Hamilton

- Una matrice quadrata A di ordine n e sempre radice del suo polinomio caratteristico.
  In altre parole sia $\chi_A(\lambda)= \det(A-\lambda I)=(-1)^n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0$, allora $(-1)^nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\ldots+a_1A+a_0I_n=\underline{0}_{n\times n}$.

Questo teorema permette di

- Ridurre il calcolo di un qualsiasi p(A) a quello di un polinomio di matrici con grado al più n-1.
  - Basta dividere $p(\lambda)$ per il polinomio caratteristico $\chi_A(\lambda)$ di A, si trova un quoziente $q(\lambda)$ e un resto $r(\lambda)$ di grado inferiore a quello di $\chi_A(\lambda)$. Essendo $p(\lambda)=q(\lambda)\,\chi_A(\lambda)+ r(\lambda)$ e $\chi_A(A)=\underline{0}n\times n$, si ottiene subito $p(A)=r(A)$.
- Ridurre il calcolo di A^{-1} (se esiste) a quello di un polinomio di matrici con grado al più n-1.
  - Sia $\chi_A(\lambda)= \det(A-\lambda I)=(-1)^n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0$. Se A è invertibile si ha $a_0\neq 0$, quindi da $(-1)^nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\ldots+a_1A+a_0I_n=\underline{0}_{n\times n}$ si ottiene (moltiplicando per A^{-1}) $A^{-1}=-(1/a_0)((-1)^nA^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\ldots+a_1I_n)$.

Sommario

Abbiamo visto:

- Come procedere per stabilire se una matrice è diagonalizzabile
- Come procedere per stabilire se due matrici sono simili
- Come si riconoscono gli endomorfismi semplici
- Il teorema di Cayley Hamilton e alcune sue semplici applicazioni