Durata: 2h

Data orale: 21/6/2018

Esame di Geometria e Algebra Lineare Politecnico di Milano – Prova del 20 giugno 2018 Ingegneria informatica, elettrica, elettronica, delle telecomunicazioni e dell'automazione		
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. I compiti privi di indicazione leggibile di nome e cognome non verranno corretti.

1. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che rispetto alla base canonica ha come matrice rappresentativa:

$$M = \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & -1 \\ -1/3 & 1/3 & -1 \\ -1/3 & -2/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Dimostrare che M è diagonalizzabile, trovare le equazioni dei suoi autospazi, verificando che uno di essi ha dimensione 2. Sia U tale autospazio.

(b) Si trovi una base $\mathcal{B}$ di autovettori e si scriva la matrice rappresentativa di f rispetto a $\mathcal{B}$.

(c) Si osservi che $v = (1,1,1)^t$ non appartiene a U. Detto $P = (x,y,z)$ un generico punto dello spazio, sia Q il punto tale che $Q - P$ appartenga al sottospazio generato da v e che il punto medio di $\overline{PQ}$ appartenga a U. Si dimostri che $f(P) = Q$.

a) Cerco gli autovalori di M:

$$\det(M-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} \frac{2}{3}-\lambda & -\frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}-\lambda & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \frac{2}{3}-\lambda & -\frac{2}{3} & -1 \\ \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono 1, con m.a. 2, e -1, con m.a +1

b) $V_1 : \begin{cases} -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - z = 0 \\ \cancel{-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - z = 0} \\ \cancel{-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - z = 0} \end{cases} \to V_1 : x + 2y + 3z = 0$ È un piano, quindi ha dimensione 2.

$\downarrow$ $(x = -2y - 3z)$

$V_1 = \mathcal{L}((-2,1,0),(-3,0,1))$

$V_{-1} : \begin{cases} \cancel{\frac{5}{3}x - \frac{2}{3}y - z = 0} \\ -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}y - z = 0 \\ -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + z = 0 \end{cases}$ (e' 2 volte la II eq. più 3 volte la III) $\longrightarrow \begin{cases} x = 4y - 3z \\ x + 2y - 3z = 0, \; 4y - 3z + 2y - 3z = 0 \end{cases}$

$6y - 6z = 0, \; y = z$

$\begin{cases} y = z \\ x = y \end{cases} \to V_{-1} = \mathcal{L}((1,1,1))$

Una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di M è, ad esempio,

$$B = \{(-2,1,0),(-3,0,1),(1,1,1)\}$$

Rispetto a tale base, f si rappresenta tramite la matrice

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) $v = (1,1,1) \notin U$, poiché $U = V_1$ e v è autovettore relativo a -1.

Sia Q tc $\begin{cases} Q - P \in V_{-1} \\ \frac{P+Q}{2} \in V_1 \end{cases}$, equivalentemente

$$\begin{cases} f(Q-P) = -Q+P \\ f\left(\frac{P+Q}{2}\right) = \frac{P+Q}{2} \end{cases}$$

. Dalla linearità di f segue: $\begin{cases} f(Q) - f(P) = -Q+P \\ f(P) + f(Q) = P+Q \end{cases}$

Sottraendo la I eq. alla II si ha

$$2f(P) = 2Q, \quad \text{cioè}, \quad f(P) = Q$$

2. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori $u = (1, 1, -2, 0)^t$ e $v = (1, 1, 1, 1)^t$, e sia V il sottospazio ortogonale al sottospazio generato da v.
   (a) Completare $\{u, v\}$ ad una base *ortogonale* $\{u, v, w_1, w_2\}$ di $\mathbb{R}^4$.
   (b) Sia U il sottospazio vettoriale generato da v, w_1 e w_2. Determinare dimensioni e basi di $U \cap V$ e $U + V$.
   (c) Scrivere la matrice P della proiezione ortogonale su U rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.
   (d) Determinare una base del nucleo e una dell'immagine della matrice $I - P$.

a) Cerco i vettori (x, y, z, t) tc

$$\begin{cases} \langle (x,y,z,t),(1,1,-2,0)\rangle = 0 \\ \langle (x,y,z,t),(1,1,1,1)\rangle = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \\ x+y+z+t=0 \end{cases} \quad \rightarrow y = 2z - x$$

$$/ \quad / \quad 3z + t = 0 \rightarrow t = -3z$$

Sono tutti quelli del tipo $(x, 2z-x, z, -3z)$.

I vettori $w_1 = (1,-1,0,0)$ e $w_2 = (1,1,1,-3)$ sono di tale tipo, e sono $\perp$ tra loro.

b) $V = \{ v' \in \mathbb{R}^4 \mid v' \perp v \}$

$U = \mathcal{L}(v, w_1, w_2)$ con $v \perp w_1$ e $v \perp w_2$.

Allora $w_1, w_2 \in V$, mentre $v \notin V$,

ne segue che $U \cap V = \mathcal{L}(w_1, w_2)$ e $\dim(U \cap V) = 2$.

Dalla f.la di Grassmann si ha

$\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V) = 3 + 3 - 2 = 4$

Quindi $U + V = \mathbb{R}^4$.

c) Poiché $U = \{v, w_1, w_2\}$ e $u \perp v$, $u \perp w_1$, $u \perp w_2$, la proiezione ortogonale su U si può anche scrivere come l'identità meno la proiezione ortogonale su $\mathcal{L}(u)$.

La proiezione su $\mathcal{L}(u)$ ha matrice rappresentativa:

$$\frac{1}{\|(1,1,-2,0)\|^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (1\ 1\ -2\ 0) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I - P$$

La matrice P è $\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{8}{6} & 1 \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{8}{6} & 1 \\ \frac{8}{6} & \frac{8}{6} & \frac{2}{6} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) La matrice $I - P$ rappresenta la proiezione ortogonale su $\mathcal{L}(u)$, quindi $\mathrm{Im}(I-P) = \mathcal{L}(u)$,

$\mathrm{Ker}(I-P) = \mathcal{L}(v, w_1, w_2)$.

3. (a) Scrivere l'equazione del cono $\mathcal{K}$ che ha vertice nel punto $P = (1,1,2)$ e come curva direttrice la circonferenza nel piano yz

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y^2 + z^2 - 2z = 0 \end{cases}$$

(b) Sia γ_2 l'intersezione $\mathcal{K}$ con il piano $z = 0$. Provare che γ_2 è una parabola.

(c) Determinare vertice e asse di γ_2.

a) Eliminando i parametri dal sistema

$$\begin{cases} x = t(x_0 - 1) + 1 \\ y = t(y_0 - 1) + 1 \\ z = t(z_0 - 2) + 2 \\ x_0 = 0 \\ y_0^2 + z_0^2 - 2z_0 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_0 = 0 \\ t = 1 - x \\ \dfrac{y-1}{1-x} = y_0 - 1, \quad y_0 = \dfrac{y-x}{1-x} \\ \dfrac{z-2}{1-x} = z_0 - 2, \quad z_0 = \dfrac{z-2x}{1-x} \\ \dfrac{(y-x)^2}{(1-x)^2} + \dfrac{(z-2x)^2}{(1-x)^2} - \dfrac{2(z-2x)}{(1-x)} = 0 \end{cases}$$

Dall'ultima equazione si trova

$$K : x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 4x - 2z = 0$$

b) $\begin{cases} K \\ z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy + 4x = 0, \quad (x-y)^2 + 4x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

è un quadrato più un termine lineare uguagliato a 0, quindi è una parabola.

c) L'asse è parallelo all'autospazio V_0 della matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, ovvero al suo nucleo,

$V_0: \begin{cases} x - y = 0 \\ \cancel{-x + y = 0} \end{cases}$. Quindi l'asse è // a $(1,1)$ e $\perp$ a $(1,-1)$.

Intersecando la parabola con la retta $\begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases}$,

si ha $4t(t+1) = 0$, $t = 0 \vee t - 1$.

Si trovano i punti $A = (0,0)$ e $B = (-1,1)$;

$M = \frac{A+B}{2} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ appartiene all'asse.

L'asse ha equazione $a: \begin{cases} x = t - \frac{1}{2} \\ y = t + \frac{1}{2} \end{cases}$

Intersecando asse e parabola si trova $4t = 1$,

quindi il vertice è $V = \left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$.