

Spazi vettoriali

Ripasso della definizione

Uno *spazio vettoriale* V su un campo K è un insieme V , detto insieme dei vettori, su cui è definita un'operazione binaria interna, detta somma, $+$, ovvero una legge che ad ogni coppia ordinata di vettori $\underline{v}, \underline{w}$ associa uno ed un solo vettore $\underline{v} + \underline{w}$, tale che $(V, +)$ sia un gruppo abeliano, ovvero

- per ogni $\underline{v}, \underline{w} \in V$ sia $\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} + \underline{v}$ (proprietà commutativa)
- per ogni $\underline{v}, \underline{w}, \underline{u} \in V$ sia $\underline{v} + (\underline{w} + \underline{u}) = (\underline{v} + \underline{w}) + \underline{u}$ (proprietà associativa)
- esista un vettore $\underline{0} \in V$ tale che per ogni $\underline{v} \in V$ si ha $\underline{v} + \underline{0} = \underline{v}$ (esistenza dell'elemento neutro)
- per ogni $\underline{v} \in V$ esista $-\underline{v} \in V$ tale che $\underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$ (esistenza dell'opposto)

ed un'operazione esterna, detta prodotto scalare-vettore, ovvero una legge che ad ogni coppia ordinata di uno scalare t e di un vettore \underline{v} associa uno ed un solo vettore $t\underline{v}$, che goda delle proprietà:

- per ogni $t \in K$ e per ogni $\underline{v}, \underline{w} \in V$ si ha $t(\underline{v} + \underline{w}) = t\underline{v} + t\underline{w}$
- per ogni $t, s \in K$ e per ogni $\underline{v} \in V$ si ha $(t+s)\underline{v} = t\underline{v} + s\underline{v}$
- per ogni $t, s \in K$ e per ogni $\underline{v} \in V$ si ha $(ts)\underline{v} = t(s\underline{v})$
- per ogni $\underline{v} \in V$ si ha $1\underline{v} = \underline{v}$

Esempi di spazi vettoriali e loro proprietà

- I vettori liberi del piano (o dello spazio) rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto scalare /vettore sono uno spazio vettoriale su \mathbb{R} .
- Le matrici di uno stesso tipo (m,n) su un campo K rispetto alle operazioni di somma e prodotto scalare/matrice che abbiamo definito precedentemente sono uno spazio vettoriale su K
- I polinomi in una indeterminata a coefficienti in un campo K rispetto all'usuale somma di polinomi e all'usuale prodotto scalare/polinomio sono un campo vettoriale su K
- I polinomi in una indeterminata a coefficienti in un campo K di grado minore o uguale ad un intero positivo n (fissato) rispetto all'usuale somma di polinomi e all'usuale prodotto scalare/polinomio sono un campo vettoriale su K
- I numeri reali rispetto alle usuali operazioni somma e prodotto di numeri reali sono uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{R} .

Ricordiamo le seguenti proprietà:

- per ogni $\underline{v}, \underline{w}, \underline{u} \in V$, $\underline{v} + \underline{w} = \underline{v} + \underline{u}$ implica $\underline{w} = \underline{u}$ (legge di cancellazione)
- per ogni $\underline{v}, \underline{w} \in V$ esiste uno ed un solo vettore \underline{x} tale che $\underline{v} + \underline{x} = \underline{w}$ ($\underline{x} = -\underline{v} + \underline{w}$)
- per ogni $t \in K$ e per ogni $\underline{v} \in V$ $t\underline{v} = \underline{0}$ se e solo se $t=0$ o $\underline{v}=\underline{0}$ (legge di annullamento del prodotto)

Dipendenza e indipendenza lineare

Sia V uno spazio vettoriale sul campo K . Ricordiamo che:

- Un vettore $\underline{v} \in V$ è *combinazione lineare* dei vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ se esistono n scalari $k_1, k_2, \dots, k_n \in K$, detti coefficienti della combinazione, tali che $\underline{v} = k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2 + \dots + k_n \underline{v}_n$.
- I vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ si dicono *linearmente indipendenti* se si può ottenere il vettore $\underline{0}$ come loro combinazione lineare solamente prendendo tutti i coefficienti della combinazione uguali a 0, altrimenti si dicono *linearmente dipendenti*, ovvero $\underline{v}_1, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente dipendenti se esistono n scalari $h_1, h_2, \dots, h_n \in K$ e non tutti nulli tali che $\underline{0} = h_1 \underline{v}_1 + h_2 \underline{v}_2 + \dots + h_n \underline{v}_n$
 - $\underline{v}_1, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente dipendenti se e solo se uno di essi (NON ciascuno di essi) è combinazione lineare dei restanti; in particolare se $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_r$ sono vettori linearmente indipendenti e $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_r, \underline{v}$ sono vettori linearmente dipendenti, allora il vettore \underline{v} è combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_r$.
 - Se $H = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ è un insieme di vettori linearmente dipendenti di V , allora ogni insieme di vettori T , tale che $H \subseteq T$ è un insieme di vettori linearmente dipendenti. Quindi se $I = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_m\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti di V , allora ogni insieme di vettori J , tale che $J \subseteq I$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti.
 - $\{\underline{v}\}$ è un insieme di vettori linearmente dipendenti se e solo se $\underline{v} = \underline{0}$.

Sottospazi di uno spazio vettoriale

- Un sottoinsieme H di uno spazio vettoriale V sul campo K si dice *sottospazio (vettoriale)* di V se H è a sua volta uno spazio vettoriale su K rispetto alla stessa somma e allo stesso prodotto scalare-vettore definiti in V (cioè la somma di due qualsiasi vettori di H è un vettore di H , $\underline{0}$ sta in H , per ogni vettore \underline{v} di H anche $-\underline{v}$ sta in H e per ogni $t \in K$ anche $t\underline{v}$ sta in H).
- *Criterio*: Un sottoinsieme H di uno spazio vettoriale V su K è un sottospazio di V se e solo se
 - 1) per ogni $\underline{v}, \underline{w} \in H$, $\underline{v} + \underline{w} \in H$
 - 2) per ogni $\underline{v} \in H$ e per ogni $t \in K$, $t\underline{v} \in H$.
 - Se H è sottospazio 1) e 2) devono essere verificate
 - Se vale 1), la somma è un'operazione interna su H , che è ovviamente commutativa e associativa. Se vale 2), il prodotto di ogni scalare per un vettore di H sta in H , inoltre per ogni vettore $\underline{v} \in H$ si ha $\underline{0} = 0\underline{v}$ e $-\underline{v} = (-1)\underline{v}$ dunque $\underline{0} \in H$ e $-\underline{v} \in H$. Infine le proprietà del prodotto scalare-vettore valendo in V valgono anche in H e dunque H è sottospazio di V

Sottospazi vettoriali

- Sia A una matrice con n colonne, $\ker A$ è un sottospazio dello spazio vettoriale K^n (spazio delle matrici di tipo $(n,1)$ su K)
 - Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \ker A$, allora $A(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = A\underline{v}_1 + A\underline{v}_2 = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$ e dunque $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in \ker A$; inoltre per ogni $t \in K$, si ha $A(t\underline{v}_1) = t(A\underline{v}_1) = t\underline{0} = \underline{0}$ e dunque $t\underline{v}_1 \in \ker A$.
- Sia V uno spazio vettoriale sul campo K e siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$
l'insieme $L(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n) = \{k_1\underline{v}_1 + k_2\underline{v}_2 + \dots + k_n\underline{v}_n \mid k_i \in K\}$ è un sottospazio vettoriale di V detto *sottospazio (lineare) generato da* $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$
 - Siano $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in L(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$, allora esistono con $k_i, h_i \in K$, $1 \leq i \leq n$, tali che $\underline{w}_1 = k_1\underline{v}_1 + k_2\underline{v}_2 + \dots + k_n\underline{v}_n$ e $\underline{w}_2 = h_1\underline{v}_1 + h_2\underline{v}_2 + \dots + h_n\underline{v}_n$ da cui $\underline{w}_1 + \underline{w}_2 = (k_1 + h_1)\underline{v}_1 + (k_2 + h_2)\underline{v}_2 + \dots + (k_n + h_n)\underline{v}_n$ e pertanto $\underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in L(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$; inoltre per ogni elemento $k \in K$ si ha $k\underline{w}_1 = (kk_1)\underline{v}_1 + (kk_2)\underline{v}_2 + \dots + (kk_n)\underline{v}_n$ e quindi $k\underline{w}_1 \in L(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$.
- Se $V = L(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$ i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ si dicono *sistema di generatori* di V e si dice che V ha *dimensione finita* (avendo un insieme finito di generatori)
 - Se $G = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ è un insieme di generatori di V , allora ogni insieme di vettori G' , tale che $G \subseteq G' \subseteq V$ è un insieme di generatori di V

Base di uno spazio vettoriale

- Sia V uno spazio vettoriale su K , $B = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ si dice *base* di V se B è un insieme di generatori di V ed un insieme di vettori linearmente indipendenti.
- $B = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ è una base per V se e solo se ogni vettore di V si scrive in uno e un solo modo come combinazione lineare dei vettori di B .
 - Ogni base di V è un sistema di generatori di V e quindi ogni vettore di \underline{v} si scrive come combinazione lineare dei vettori della base, inoltre supponiamo sia $\underline{v} = k_1 \underline{v}_1 + k_2 \underline{v}_2 + \dots + k_n \underline{v}_n = h_1 \underline{v}_1 + h_2 \underline{v}_2 + \dots + h_n \underline{v}_n$, da questo si ottiene $\underline{0} = (k_1 - h_1) \underline{v}_1 + (k_2 - h_2) \underline{v}_2 + \dots + (k_n - h_n) \underline{v}_n$ da cui, essendo i vettori di B linearmente indipendenti, $k_1 - h_1 = k_2 - h_2 = \dots = k_n - h_n = 0$ e pertanto $k_1 = h_1, k_2 = h_2, \dots, k_n = h_n$.
 - Se ogni vettore di V si scrive come combinazione lineare dei vettori di B , tali vettori sono un sistema di generatori per V . Inoltre $\underline{0}$ si può scrivere come combinazione lineare dei vettori di B con coefficienti della combinazione tutti uguali a 0 , e poiché ogni vettore di V (e quindi $\underline{0}$) si scrive in un solo modo come combinazione lineare dei vettori di B , ogni combinazione lineare dei vettori di B che dia come risultato lo $\underline{0}$ deve avere i coefficienti tutti nulli e quindi i vettori di B sono linearmente indipendenti.

Da sistema di generatori a base (scarti successivi)

- Un vettore \underline{w} è combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ se e solo se $L(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n, \underline{w}) = L(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$
- Da un sistema di generatori $G = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ di V , si può sempre estrarre una base di V (in altre parole ogni spazio vettoriale di dimensione finita ha una base)
 - Eliminiamo dai vettori di G tutti gli $\underline{0}$,
 - Sugli m vettori restanti non nulli, eseguiamo il seguente *algoritmo (degli scarti successivi)*:
 1. $i := 2, B := G$
 2. se \underline{v}_i è combinazione lineare dei precedenti $B := B \setminus \{\underline{v}_i\}$,
 3. $i := i + 1$
 4. se $i \leq m$, torna al passo 2., altrimenti restituisci B .
 - B è una base infatti è un sistema di generatori per la prima affermazione di questa pagina ed i vettori di B sono linearmente indipendenti perché se $\underline{0}$ si scrivesse come combinazione lineare di vettori di B a coefficienti non tutti nulli, il vettore di B con indice massimo che compare nella scrittura di $\underline{0}$ si potrebbe scrivere come combinazione lineare dei precedenti e allora avrebbe dovuto essere eliminato da B .

Completamento della base

Teorema del completamento della base: Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita e $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_r$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti di V , esiste sempre una base di V che contiene i vettori $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_r$.

- Se V ha dimensione finita ha un insieme finito di generatori $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_t\}$, quindi anche $G = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_r, \underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_t\}$ è un sistema di generatori di V .
- Applichiamo l'algoritmo degli scarti successivi a G e troviamo una base per V . Nessuno degli \underline{u}_i viene cancellato perché per ipotesi sono un insieme di vettori linearmente indipendenti e quindi nessuno è combinazione lineare degli altri.

Dimensione di uno spazio vettoriale

- Sia $G = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ un sistema di generatori di V , ogni insieme $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_m$ di vettori di V con $m > n$ è un insieme di vettori linearmente dipendenti.
 - Se $V = L(\underline{v}_1)$, cioè $n=1$, per ogni $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in V$ è $\underline{w}_1 = t_1 \underline{v}_1, \underline{w}_2 = t_2 \underline{v}_1$ quindi $t_2 \underline{w}_1 - t_1 \underline{w}_2 = \underline{0}$ con uno almeno dei t_i non nullo
 - Ipotesi di induzione: in ogni spazio vettoriale con $n-1$ generatori ogni insieme di $m > n-1$ vettori è un insieme di vettori linearmente dipendenti
 - Sia $V = L(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$ e siano $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_m \in V$ con $m > n$. Per ogni $i, 1 \leq i \leq m$, $\underline{w}_i = t_{i1} \underline{v}_1 + t_{i2} \underline{v}_2 + \dots + t_{in} \underline{v}_n$. Se $t_{i1} = 0$ per ogni i si ha $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_m \in L(\underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$ e quindi $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_m$ linearmente dipendenti per ipotesi di induzione. Sia allora $t_{11} \neq 0$, e sia $\underline{w}'_j = t_{11} \underline{w}_j - t_{j1} \underline{w}_1$ per ogni $j, 2 \leq j \leq m$. Poiché $\underline{w}'_2, \underline{w}'_3, \dots, \underline{w}'_m \in L(\underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$ ed $m-1 > n-1$, $\underline{w}'_2, \underline{w}'_3, \dots, \underline{w}'_m$ sono linearmente dipendenti per ipotesi di induzione, quindi esistono a_2, a_3, \dots, a_m non tutti nulli tali che $a_2 \underline{w}'_2 + a_3 \underline{w}'_3 + \dots + a_m \underline{w}'_m = \underline{0}$, da cui $-(a_2 t_{21} + \dots + a_m t_{m1}) \underline{w}_1 + a_2 t_{11} \underline{w}_2 + \dots + a_m t_{11} \underline{w}_m = \underline{0}$ con almeno un $a_i t_{i1} \neq 0$, quindi $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_m$ sono un insieme di vettori linearmente dipendenti.
- Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita e $B = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ e $B' = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_r\}$ sono due basi di V allora $n=r$.
 - B , essendo una base, è un insieme di generatori. Se fosse $r > n$, i vettori di B' sarebbero linearmente dipendenti e quindi non formerebbero una base, dunque $r \leq n$. Analogamente si mostra che $n \leq r$ e dunque si ha $n=r$.
- Si dice *dimensione* di uno spazio vettoriale di dimensione finita il numero di vettori che compongono una sua base.
- Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n , allora ogni insieme di generatori è formato da $m \geq n$ vettori, ogni insieme di vettori linearmente indipendenti è formato da $r \leq n$ vettori. In particolare un insieme di generatori formato da n vettori è una base e un insieme di n vettori linearmente indipendenti è una base.

Esempi

- Lo spazio dei vettori liberi del piano ha dimensione 2 e quello dei vettori liberi dello spazio ha dimensione 3
- Lo spazio delle matrici di tipo (m,n) su un campo K ha dimensione mn , infatti una sua base (detta *base canonica*) è formata dalle matrici E_{ij} , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, il cui elemento di posto (i,j) è 1 e i cui altri elementi sono 0. In particolare lo spazio K^n dei vettori colonne con n componenti ha dimensione n e la sua base canonica è $\{\underline{e}_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, dove \underline{e}_i è il vettore i cui elementi sono tutti nulli, eccetto l'elemento di posto i che è 1.
- Lo spazio dei polinomi di grado $< n$ in una indeterminata x a coefficienti in K ha dimensione n . Una base è $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$
- Esistono spazi vettoriali di dimensione infinita: ad esempio lo spazio dei polinomi in una indeterminata x a coefficienti in \mathbb{R} con le usuali operazioni di somma e prodotto di numero reale per polinomio.
- Lo spazio vettoriale $\{\underline{0}\}$ non ha base in quanto non contiene un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Sommario

Abbiamo imparato:

- cosa è uno spazio vettoriale;
- quando un insieme di vettori di uno spazio vettoriale è costituito da vettori linearmente indipendenti (dipendenti);
- cosa è un sottospazio di uno spazio vettoriale;
- il criterio che caratterizza i sottospazi;
- cosa è il sottospazio lineare generato da un insieme di vettori;
- cosa è un insieme di generatori e quando uno spazio vettoriale ha dimensione finita;
- cosa è una base di uno spazio vettoriale;
- il teorema di completamento della base;
- cos'è la dimensione di uno spazio vettoriale di dimensione finita, e come la dimensione è legata al numero di vettori che costituiscono un insieme di generatori o un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Alcune di queste nozioni le avevamo già incontrate!