

NOTA BENE.

Questi appunti non sono esaustivi, non contengono tutto ciò che è stato detto a lezione/ esercitazione; costituiscono una base minima di conoscenze necessarie a superare l'esame e possono essere utili per un ripasso veloce.

AUTOVALORI, AUTOVETTORI, MATRICI DIAGONALIZZABILI (Capitolo 7 del testo)

Def.1. Sia $f: V \rightarrow V$ un endomorfismo dello spazio vettoriale V sul campo K . Un vettore $\underline{v} \in V$ si dice *autovettore* per f se $\underline{v} \neq \underline{0}$ ed esiste uno scalare $\lambda \in K$ tale $f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$ ed in tal caso si dice che \underline{v} è un *autovettore associato all'autovalore* λ .

Dal punto di vista "geometrico" gli autovettori di un endomorfismo f possono essere visti come quei vettori la cui direzione non è modificata dall'endomorfismo f .

Supponiamo ora che V abbia dimensione finita n e che, rispetto ad una base \mathcal{B} di V , l'endomorfismo f abbia come matrice associata la matrice A (che sarà quadrata di ordine n). Come abbiamo visto, se rappresentiamo ogni vettore $\underline{v} \in V$ come la matrice colonna di tipo $(n,1)$ $v|_{\mathcal{B}}$ (i cui elementi sono le componenti del vettore rispetto alla base \mathcal{B} , ovvero i coefficienti della scrittura del vettore come combinazioni lineari dei vettori della base \mathcal{B}), f si può scrivere nella forma $f(\underline{x}) = A\underline{x}$, dove \underline{x} è un generico vettore di K^n .

Cercare un autovettore di f corrisponde dunque a cercare i vettori non nulli tali che $A\underline{x} = \lambda \underline{x}$ per qualche scalare λ . Poiché $\lambda \underline{x} = \lambda I_n \underline{x}$, $A\underline{x} = \lambda \underline{x}$ è equivalente a $A\underline{x} = \lambda I_n \underline{x}$, e quindi a $(A - \lambda I_n)\underline{x} = \underline{0}$, trovare un autovettore di f significa dunque trovare le autosoluzioni, se esistono, del sistema lineare omogeneo $(A - \lambda I_n)\underline{x} = \underline{0}$. Perché un sistema lineare omogeneo abbia autosoluzioni il determinante della matrice dei coefficienti deve essere nullo, dunque deve essere $\det(A - \lambda I_n) = 0$; $\det(A - \lambda I_n)$ è un polinomio di grado n nell'indeterminata λ a coefficienti in K .

Ricordiamo che uno scalare $\alpha \in K$ si dice radice del polinomio $p(x)$ a coefficienti in K se $p(\alpha) = 0$ ed la radice α si dice di *molteplicità (algebraica)* k se $(x - \alpha)^k$ divide $p(x)$ ma $(x - \alpha)^{k+1}$ non divide $p(x)$. Sussiste il seguente teorema:

Teorema fondamentale dell'algebra: Un polinomio $p(x)$ di grado n nel campo complesso ammette n radici, purché ogni radice sia contata con la propria molteplicità.

Questo dice che se si lavora nel campo C allora si ha $p(x) = a(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_s)^{k_s}$ con $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$ ed a coefficiente direttivo di $p(x)$. Ovviamente in R $p(x)$ ha un numero di radici minore o uguale ad n e quindi non si decompone necessariamente nel prodotto di fattori lineari, quindi il numero di autovalori reali di una matrice quadrata reale di ordine n è minore od uguale ad n .

Def.2. Sia A una matrice quadrata di ordine n a coefficienti in K . Il polinomio $\det(A - \lambda I_n)$ si chiama *polinomio caratteristico* della matrice A , le sue radici sono dette *autovalori della matrice* A . Se un autovalore λ di A ha molteplicità k come radice del polinomio caratteristico di A , si dice che λ è un *autovalore di molteplicità* algebraica k della matrice A .

Un autovettore di un endomorfismo $f: V \rightarrow V$, che rispetto alla base \mathcal{B} è rappresentato dalla matrice A , deve essere associato ad un autovalore di A , inoltre ad ogni autovalore $\tilde{\lambda}$ di A è associato un insieme $S(\tilde{\lambda})$ di autovettori, che (come già detto) è formato dalle autosoluzioni del sistema lineare omogeneo $(A - \tilde{\lambda} I_n)\underline{x} = \underline{0}$, tali autosoluzioni vengono anche dette *autovettori della matrice* A associati all'autovalore $\tilde{\lambda}$.

L'insieme $V(\tilde{\lambda}) = S(\tilde{\lambda}) \cup \{0\}$ delle soluzioni del sistema $(A - \tilde{\lambda}I_n)\underline{x} = \underline{0}$, forma un sottospazio vettoriale di V detto *autospatio associato a $\tilde{\lambda}$* e ovviamente si ha $\dim V(\tilde{\lambda}) = n - r(A - \tilde{\lambda}I_n)$ (in quanto $V(\tilde{\lambda})$ è il nucleo dell'applicazione lineare che ha come matrice associata $A - \tilde{\lambda}I_n$).

Def 3. Sia λ un autovalore di una matrice reale A quadrata di ordine n . La dimensione di $V(\lambda)$ si chiama *molteplicità geometrica* di λ .

ESEMPI

1) Trovare autovalori ed autovettori della matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Consideriamo il polinomio caratteristico di A :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[- \lambda(1-\lambda)-6] = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6),$$

gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico, pertanto $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$, $\lambda_3=3$ sono gli autovalori di A .

Gli autovettori di A associati all'autovalore 1 sono le autosoluzioni dell'equazione matriciale

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \text{ Tali soluzioni sono i vettori del tipo } \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ con } k \neq 0. \text{ L'autospatio } V(1)$$

ha dunque dimensione 1 ed una sua possibile base è formata dal vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Gli autovettori di A associati all'autovalore -2 sono le autosoluzioni dell'equazione matriciale

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e sono i vettori del tipo } \begin{bmatrix} -2h/3 \\ -h \\ h \end{bmatrix} \text{ con } h \neq 0. \text{ L'autospatio } V(-2) \text{ ha}$$

dunque dimensione 1 ed una sua possibile base è formata dal vettore $\begin{bmatrix} -2/3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Gli autovettori di A associati all'autovalore 3 sono le autosoluzioni dell'equazione matriciale

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e sono i vettori del tipo } \begin{bmatrix} t \\ 2t/3 \\ t \end{bmatrix} \text{ con } t \neq 0. \text{ L'autospazio } V(3) \text{ ha}$$

dunque dimensione 1 ed una sua possibile base è formata dal solo vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2) Trovare autovalori ed autovettori dell'endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ rappresentato da

$$\begin{cases} x' = x + z \\ y' = y - z \\ z' = x - y \end{cases}$$

Si può procedere direttamente, cercando di stabilire per quali valori di λ il sistema

$$\begin{cases} \lambda x = x + z \\ \lambda y = y - z \\ \lambda z = x - y \end{cases}$$

ha autosoluzioni. Il determinante della matrice dei coefficienti deve essere nullo e dunque si

$$\text{deve avere } \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2 - (1-\lambda) - (1-\lambda) = (1-\lambda)(-\lambda + \lambda^2 - 2) = 0 \text{ e quindi si ottiene}$$

che si possono avere autosoluzioni per $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=-1$. Gli autovettori associati

$$\text{all'autovalore } \lambda_1=1 \text{ sono le autosoluzioni di } \begin{cases} x = x + z \\ y = y - z \\ z = x - y \end{cases} \text{ ed hanno quindi la forma } \begin{bmatrix} k \\ k \\ 0 \end{bmatrix} \text{ con}$$

$$k \neq 0. \text{ Gli autovettori associati all'autovalore } \lambda_2=2 \text{ sono le autosoluzioni di } \begin{cases} 2x = x + z \\ 2y = y - z \\ 2z = x - y \end{cases} \text{ ed}$$

$$\text{hanno quindi la forma } \begin{bmatrix} h \\ -h \\ h \end{bmatrix} \text{ con } h \neq 0. \text{ Gli autovettori associati all'autovalore } \lambda_3=-1 \text{ sono le}$$

$$\text{autosoluzioni di } \begin{cases} -x = x + z \\ -y = y - z \\ -z = x - y \end{cases} \text{ ed hanno quindi la forma } \begin{bmatrix} t \\ -t \\ -2t \end{bmatrix} \text{ con } t \neq 0.$$

Osserviamo che l'endomorfismo f può essere scritto in forma matriciale come

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \text{ e quindi per trovare autovalori ed autovettori di } f \text{ basta trovare}$$

autovalori ed autovettori della matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

D'ora in poi faremo sempre riferimento ad autovalori ed autovettori di una matrice A (reale e quadrata di ordine n), avendo ben chiaro che essi possono anche essere visti come gli autovalori ed autovettori di un endomorfismo f (su un spazio vettoriale di dimensione n sul campo reale, quindi uno spazio isomorfo ad \mathbb{R}^n) che ha, rispetto ad una base opportuna, come matrice associata la matrice A . Ovviamente alcuni autovalori potrebbero essere numeri complessi ed in tal caso essendo A reale anche gli autovettori ad essi associati sarebbero elementi di \mathbb{C}^n .

Sussistono le seguenti proprietà:

1. Se λ_1, λ_2 sono due autovalori distinti di A allora $V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2) = \{0\}$.
Supponiamo infatti che \underline{v} sia un autovettore associato sia a λ_1 , sia a λ_2 . Allora per definizione di autovettore associato ad un autovalore abbiamo $A\underline{v} = \lambda_1\underline{v}$ e $A\underline{v} = \lambda_2\underline{v}$, quindi $\lambda_1\underline{v} = \lambda_2\underline{v}$, da cui $(\lambda_1 - \lambda_2)\underline{v} = 0$ e quindi essendo $\underline{v} \neq 0$ si ottiene $\lambda_1 = \lambda_2$.
2. Detti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gli autovalori di A , si ha $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$, di conseguenza A è singolare se e solo se ha almeno un autovalore nullo.
Si ha infatti $\det(A - \lambda I) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$ da cui ponendo $\lambda = 0$ si ottiene $\det(A) = (-1)^n (-\lambda_1)(-\lambda_2) \dots (-\lambda_n) = (-1)^n (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$.
3. Detti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gli autovalori di A , $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ è la somma degli elementi diagonali di A , tale somma viene detta *traccia di A*.
Basta considerare i coefficienti di λ^{n-1} in $\det(A - \lambda I)$ e in $(-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$.
4. Gli autovalori di una matrice triangolare sono i suoi elementi diagonali.
5. Se \underline{v} è autovettore di A relativo all'autovalore λ , allora
 - a. \underline{v} è autovettore di A^m relativo all'autovalore λ^m ,
 - b. se A è invertibile allora $\lambda \neq 0$ è \underline{v} è autovettore di A^{-1} rispetto all'autovalore $1/\lambda$,
 - c. sia $p(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_0$, allora definiamo $p(A) = a_d A^d + a_{d-1} A^{d-1} + \dots + a_0 I_n$; \underline{v} è un autovettore della matrice $p(A)$ rispetto all'autovalore $p(\lambda)$.

Per dimostrare a. procediamo per induzione su m . Sappiamo che $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$ e supponiamo che $A^{m-1}\underline{v} = \lambda^{m-1}\underline{v}$, moltiplichiamo entrambi i membri di questa uguaglianza a sinistra per A ed abbiamo $A(A^{m-1}\underline{v}) = A\lambda^{m-1}\underline{v} = \lambda^{m-1}A\underline{v} = \lambda^{m-1}\lambda\underline{v}$, quindi $A^m\underline{v} = \lambda^m\underline{v}$.

Per dimostrare la b. ricordiamo che dalla 2 abbiamo che $\lambda \neq 0$, partiamo allora da $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$ e moltiplichiamo a sinistra per $(1/\lambda)A^{-1}$ entrambi i membri dell'uguaglianza, abbiamo $(1/\lambda)\underline{v} = A^{-1}\underline{v}$.

La c. segue da a. e dal fatto che se \underline{v} è autovettore di due matrici A e B associato rispettivamente agli autovalori λ e μ allora è autovettore di $A+B$ associato all'autovalore $\lambda + \mu$.

Def 4. Siano A e B sue matrici quadrate dello stesso ordine n sul campo K . Diciamo che A è *simile* a B se esiste una matrice non singolare P tale che $A = P^{-1}BP$.

Proposizione 1: La relazione di similitudine fra matrici gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva e quindi è una relazione di equivalenza.

Dim. Ogni matrice A è simile a se stessa, infatti $A = I_n^{-1} A I_n$ (dove I_n rappresenta la matrice identica di ordine n). Se la matrice A è simile a B allora B è simile ad A infatti se A è simile a B abbiamo $A = P^{-1} B P$ per una qualche matrice P , da cui moltiplicando a sinistra per P e a destra per P^{-1} abbiamo $P A P^{-1} = B$ cioè $(P^{-1})^{-1} A P^{-1} = B$ e dunque B è simile ad A e la matrice che trasforma A in B è P^{-1} . Se la matrice A è simile a B e B è simile ad C allora A è simile a C , infatti se A è simile a B abbiamo $A = P^{-1} B P$ per una qualche matrice P , e analogamente se B è simile a C abbiamo, per una qualche matrice Q , $B = Q^{-1} C Q$; Sostituiamo B con $Q^{-1} C Q$ in $A = P^{-1} B P$ ed otteniamo $A = P^{-1} (Q^{-1} C Q) P = (Q P)^{-1} C (Q P)$ e dunque A è simile ad C e la matrice che trasforma A in C è $Q P$.

Poiché la relazione di similitudine gode della proprietà simmetrica, nel seguito se A è simile a B diremo semplicemente che A e B sono *simili*.

Proposizione 2: Siano A e B due matrici quadrate di ordine n . Se la matrice A rappresenta l'applicazione lineare $f: V \rightarrow V$ rispetto alla base \mathcal{B} di V e la matrice B rappresenta la stessa applicazione lineare f rispetto alla base \mathcal{C} di V , allora $A = P^{-1} B P$, dove P rappresenta la matrice di passaggio dalla base \mathcal{B} alla base \mathcal{C} , e viceversa se due matrici sono simili rappresentano la stessa applicazione lineare rispetto a due basi diverse di V .

Dim. Dalla proposizione 11 delle dispense sulle applicazioni lineari otteniamo subito la prima parte del teorema. Viceversa se $A = P^{-1} B P$, consideriamo l'applicazione lineare $f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ associata alla matrice A (rispetto alla base canonica) e consideriamo il cambiamento di base di \mathbb{R}^n rappresentato da P (le colonne di P rappresentano le coordinate dei vettori della nuova base rispetto alla vecchia canonica), allora B è la matrice associata all'applicazione f_A rispetto alla base così trovata.

Abbiamo subito le seguenti proprietà

- Se $p(x)$ è un polinomio a coefficienti in \mathbb{R} ed A e B sono simili allora $p(A)$ e $p(B)$ sono simili, in particolare se $A = P^{-1} B P$ allora $p(A) = P^{-1} p(B) P$.
Infatti si verifica subito che $(P^{-1} A P)^m = P^{-1} A^m P$ e che $P^{-1} (aC + bD) P = a P^{-1} C P + b P^{-1} D P$, per ogni coppia di matrici quadrate C e D .
- Due matrici simili A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico e quindi gli stessi autovalori con le stesse molteplicità algebriche, lo stesso determinante e la stessa traccia.
Infatti, se A e B sono simili, esiste una matrice P tale che $B = P^{-1} A P$ ed inoltre è sempre $\lambda I = P^{-1} \lambda I P$; si ha pertanto $\det(B - \lambda I) = \det(P^{-1} A P - \lambda I) = \det(P^{-1} A P - P^{-1} \lambda I P) = \det P^{-1} (A - \lambda I) P = \det P^{-1} \det(A - \lambda I) \det P = \det(A - \lambda I)$. Le altre affermazioni seguono da 3 e dalla definizione di autovalore.

Osserviamo che *due matrici possono avere lo stesso polinomio caratteristico senza essere simili*.

Basta considerare la matrice nulla di ordine 2 e la matrice $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ entrambe hanno λ^2 come polinomio caratteristico, ma abbiamo già osservato che NON sono simili. Tuttavia in queste matrici l'autovalore 0 ha molteplicità geometriche diverse. Quindi non possono essere simili come conseguenza della seguente proprietà:

- Gli autovalori di due matrici simili hanno la stessa molteplicità geometrica.
Infatti siano A, B due matrici simili, e sia $P^{-1} A P = B$. Sia \underline{v} un autovettore di A associato all'autovalore λ , allora $P^{-1} \underline{v}$ è un autovettore di B associato a λ : infatti $B P^{-1} \underline{v} = P^{-1} A P P^{-1} \underline{v} = P^{-1} A \underline{v} = P^{-1} \lambda \underline{v} = \lambda P^{-1} \underline{v}$. Da questo segue che l'autospazio di A associato a λ ha la stessa dimensione dell'autospazio di B associato a λ , quindi λ ha la stessa molteplicità geometrica rispetto ad A e a B .

Osserviamo (senza dimostrarlo) che due matrici di ordine 2 o 3 che abbiano lo stesso polinomio caratteristico (quindi gli stessi autovalori con le stesse molteplicità algebriche) e gli autovalori con le stesse molteplicità geometriche, sono simili, questo non accade però in generale. Ad esempio le

matrici $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ hanno entrambe polinomio caratteristico λ^4 , l'autovalore

0 ha in entrambi i casi molteplicità geometrica 2, ma A e B non sono simili perché $A^2 = \underline{0}_2$, dove $\underline{0}_2$ indica la matrice nulla di ordine 2, mentre $B^2 \neq \underline{0}_2$. Dunque dalla 6. A e B non possono essere simili.

9. La molteplicità geometrica di un autovalore è minore od uguale alla sua molteplicità algebrica.

Infatti sia $\tilde{\lambda}$ un autovalore di A di molteplicità geometrica g e sia $B_{\tilde{\lambda}} = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_g\}$ una base dell'autospazio $V(\tilde{\lambda})$. Estendiamo $B_{\tilde{\lambda}}$ ad una base B di tutto K^n . Sia M la matrice che rappresenta l'endomorfismo $f_A: K^n \rightarrow K^n$ rispetto alla base B. La matrice M ha la forma

$\begin{bmatrix} \tilde{\lambda} I_g & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$ in quanto le sue colonne sono le coordinate delle immagini dei vettore della base

B rispetto alla base B stessa e quindi, essendo $A\underline{w}_h = \tilde{\lambda}\underline{w}_h$, per ogni $1 \leq h \leq g$, la h-esima colonna di M ha 1 nella posizione h e 0 nelle rimanenti posizioni. Ora essendo M ed A matrici simili si ha $\det(A - \lambda I) = \det(M - \lambda I) = (\lambda - \tilde{\lambda})^g \det(C - \lambda I)$, da cui segue che la molteplicità algebrica di $\tilde{\lambda}$ è almeno g.

Def.5. Un autovalore λ_i di una matrice A si dice *regolare* se $\text{rk}(A - \lambda_i I) = n - k_i$, dove k_i è la molteplicità algebrica dell'autovalore λ_i . In altre parole λ_i è regolare se la sua molteplicità algebrica coincide con la sua molteplicità geometrica.

Si osserva facilmente che

10. un autovalore di molteplicità 1 è sempre regolare,

11. l'autospazio associato ad un autovalore regolare di molteplicità algebrica k ha dimensione k.

Def.6. Una matrice quadrata A si dice *diagonalizzabile* se è simile ad una matrice diagonale.

Poiché abbiamo osservato che due matrici simili hanno gli stessi autovalori, se A è una matrice diagonalizzabile, la matrice diagonale a cui è simile avrà sulla diagonale gli autovalori di A (infatti una matrice diagonale è triangolare e ha quindi come autovalori i suoi elementi diagonali). Dunque

12. Se A è diagonalizzabile e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sono i suoi autovalori, esiste una matrice non singolare P tale che $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Da questo ricaviamo che se A è diagonalizzabile in K deve avere n autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ appartenenti a K (eventualmente in parte coincidenti) ed inoltre deve esistere una matrice invertibile P tale che $AP = P \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Da questa uguaglianza, detta \underline{c}_i la i-esima colonna di P, otteniamo per ogni i, con $1 \leq i \leq n$, $A\underline{c}_i = \lambda_i \underline{c}_i$, quindi \underline{c}_i è un autovettore di A relativo all'autovalore λ_i . Poiché P è invertibile segue che le sue colonne devono essere linearmente indipendenti, quindi A deve avere n autovettori linearmente indipendenti.

Teorema 1. Una matrice A quadrata di ordine n è diagonalizzabile su K se e solo se K^n ammette una base di autovettori

Dim. Abbiamo già dimostrato la parte "solo se" del teorema, infatti abbiamo visto che se A è diagonalizzabile esistono n autovettori di A linearmente indipendenti e tali vettori sono una base di K^n . Per dimostrare la parte "se", supponiamo allora che K^n ammetta una base di autovettori

Esistono quindi n autovettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ linearmente indipendenti di A . Ogni \underline{v}_i deve essere associato ad un autovalore λ_i di A , si ha allora $A\underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i$ per ogni i , con $1 \leq i \leq n$. Detta P la matrice formata dall'accostamento dei vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ si ha allora $AP = P \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Poiché $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti P è invertibile e dunque, moltiplicando a sinistra per P^{-1} , si ha $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Poiché una matrice quadrata A può sempre essere pensata come la matrice associata ad un endomorfismo $f: V \rightarrow V$ di dimensione n sul campo reale (complesso) ne segue che A è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di V formata solo da autovettori di f (ovvero da autovettori di A).

In particolare per il seguito a noi servirà stabilire se una matrice reale A quadrata di ordine n sia diagonalizzabile su \mathbb{R} , quindi il teorema in questo caso diventa

Corollario 1. Una matrice reale A quadrata di ordine n è diagonalizzabile su \mathbb{R} se e solo se ha n autovalori reali (ciascuno contato con la propria molteplicità algebrica) ed \mathbb{R}^n ammette una base di autovettori

Siano allora $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ gli autovalori distinti di A , consideriamo il sottospazio $H = V(\lambda_1) + V(\lambda_2) + \dots + V(\lambda_s)$ di V , poiché sappiamo che, se $i \neq j$, $V(\lambda_i) \cap V(\lambda_j) = \{0\}$ abbiamo H è somma diretta degli autospazi $V(\lambda_i)$ e quindi

$$(1) \quad \dim H = \dim V(\lambda_1) + \dim V(\lambda_2) + \dots + \dim V(\lambda_s) \leq k_1 + k_2 + \dots + k_s.$$

Nella (1) vale l'uguaglianza se e solo se gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ sono tutti regolari. Inoltre se tutte le radici del polinomio caratteristico sono reali abbiamo che $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$ (per il teorema fondamentale dell'algebra). Possiamo quindi concludere con il seguente

Teorema 2. Una matrice A è diagonalizzabile nel campo reale se e solo se ha tutti gli autovalori reali e regolari.

Da quanto detto sopra segue che

13. una matrice A di ordine n che ha n autovalori reali e distinti è sempre diagonalizzabile nel campo reale.
14. una matrice è diagonalizzabile in \mathbb{R} se e solo se, dette k_1, k_2, \dots, k_s le molteplicità geometriche dei suoi autovalori reali, si ha $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$.

Quanto abbiamo visto precedentemente ci permette di rispondere al seguente

Problema: Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n . Quando e come è possibile scegliere una base di V in modo che f sia rappresentato in modo «semplice»?

Risposta: Sia B una base di V e sia A la matrice che rappresenta f rispetto a tale base. Se A è diagonalizzabile e quindi V ha una base di autovettori C , l'automorfismo rispetto alla base C è rappresentato dalla matrice $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, ove λ_i è l'autovalore associato all' i -esimo vettore della base C .

Chiaramente se esiste una base di V rispetto alla quale f è rappresentato da una matrice diagonalizzabile allora f sarà rappresentato da una matrice diagonalizzabile rispetto ad ogni base di V (in quanto matrici che rappresentano uno stesso endomorfismo rispetto a basi diverse sono simili) e quindi se f è rappresentabile rispetto a qualche base di V da una matrice diagonale, sarà rappresentato da una matrice diagonalizzabile rispetto ad una qualsiasi altra base di V .

Possiamo quindi dare la seguente

Def. 7. Un endomorfismo di V si dice *semplice* se rispetto ad una qualsiasi base di V è rappresentato da una matrice diagonalizzabile. O equivalentemente se V ammette una base di autovettori di f .

ESEMPI

- 3) Decidere se la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ è diagonalizzabile.

Il polinomio caratteristico di A è $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$, gli autovalori di A sono quindi 1 (con molteplicità 2), 2 (con molteplicità 1). L'autovalore 2 è sicuramente regolare, per decidere se l'autovalore 1 è regolare dobbiamo calcolare $r(A-I)$.

$A-I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ha rango 2, infatti il minore formato da prima e seconda colonna, prima e terza riga è diverso da 0, dunque l'autovalore 1 non è regolare e la matrice A non è diagonalizzabile.

- 4) Decidere se la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ è diagonalizzabile.

Il polinomio caratteristico di A è ancora $(1-\lambda)^2(2-\lambda)$, quindi A ha come autovalori 1 (con molteplicità 2) e 2 (con molteplicità 1). L'autovalore 2, avendo molteplicità 1, è regolare. Calcoliamo il rango di $A-I$.

$A-I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ha evidentemente rango 1, dunque $V(1)$ ha dimensione 2 ed 1 è un autovalore regolare, pertanto A è diagonalizzabile. Una matrice P che diagonalizza A si ottiene calcolando $V(1)$ e $V(2)$.

Si vede subito che $V(1) = \{[h, k, -k]^T | h, k \in \mathbb{R}\}$, $V(2) = \{[t, 0, -t]^T | t \in \mathbb{R}\}$, dunque $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ è

tale che $P^{-1}AP = \text{diag}(1,1,2)$. Se volessimo ottenere $\text{diag}(1,2,1)$ dovremmo prendere $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Ricapitolando, se abbiamo una matrice quadrata reale di ordine n per decidere se è diagonalizzabile in \mathbb{R} procediamo così

1. Calcoliamo gli autovalori di A, se non sono tutti reali (ovvero se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali che troviamo è minore di n) la matrice non è diagonalizzabile in \mathbb{R} .

2. Se sono tutti reali allora

2.1. Se gli autovalori sono tutti distinti allora A è diagonalizzabile,

2.2. se ci sono autovalori con molteplicità algebrica >1 allora

2.2.1. Per ogni autovalore λ_i di molteplicità algebrica $k_i > 1$ calcoliamo la molteplicità geometrica di λ_i . Se la molteplicità geometrica di λ_i è diversa da k_i per almeno un λ_i allora la matrice non è diagonalizzabile, altrimenti è diagonalizzabile.

Se vogliamo stabilire se è diagonalizzabile in \mathbb{C} abbiamo dal teorema fondamentale dell'algebra che A in \mathbb{C} ha n autovalori e quindi procediamo come prima a partire da punto 2.

Se abbiamo due matrici A e B quadrate dello stesso ordine n per stabilire se sono simili procediamo così

1. Calcoliamo il polinomio caratteristico di A e B , se tali polinomi sono diversi A e B non sono simili

2. Se i polinomi caratteristici di A e B sono uguali, vediamo se A e B sono diagonalizzabili

2.1. Se sono entrambe diagonalizzabili A e B sono simili, in quanto simili ad una stessa matrice diagonale.

2.2. Se una è diagonalizzabile e l'altra no, non sono simili

2.3. Se entrambe non sono diagonalizzabili, allora

2.3.1. Se c'è un autovalore che in A ha molteplicità geometrica diversa da quella che ha in B allora non sono simili

2.3.2. Se tutti gli autovalori hanno in A e in B hanno la stessa molteplicità geometrica, allora

2.3.2.1. Se $n=2$ o $n=3$ A e B sono simili

2.3.2.2. Se $n \geq 4$ bisogna procedere (con le conoscenze che abbiamo) usando direttamente la definizione di matrici simili.

Vogliamo ora enunciare il

Teorema di Cayley Hamilton. Sia A una matrice quadrata di ordine n , allora detto $p_A(\lambda)$ il suo polinomio caratteristico si ha $p_A(A) = \underline{0}_n$, in altre parole ogni matrice quadrata è radice del suo polinomio caratteristico.

Dim. Sia B la matrice il cui elemento di posto (i,j) è il complemento algebrico dell'elemento di posto (j,i) della matrice $A - \lambda I_n$, è ben noto che $(A - \lambda I_n)B = p_A(\lambda)I_n$ (ricordarsi che $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$) e guardare la dispensina sul determinante: nuovo modo per calcolare l'inversa). Gli elementi di B sono polinomi in λ di grado $\leq n-1$, quindi possiamo scrivere $B = B_0 + \lambda B_1 + \dots + \lambda^{n-1} B_{n-1}$, con B_i matrici opportune ad elementi reali. Sia $p_A(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0$. Sostituendo l'espressione di B e di $p_A(\lambda)$ nella $(A - \lambda I_n)B = p_A(\lambda)I_n$ abbiamo che $AB_0 = a_0 I_n$, $-B_{n-1} = a_n I_n$, $AB_i - B_{i-1} = a_i I_n$ per ogni $1 \leq i \leq n-1$. da cui sostituendo A a λ si ottiene il risultato.

Il teorema di Cayley Hamilton fornisce un altro metodo per calcolare, quando esiste, l'inversa di A . Infatti se A è invertibile a_0 che, a meno del segno, è il prodotto degli autovalori di A è diverso da 0, Il teorema di Cayley Hamilton dice che $I_n = -(a_n A^n + \dots + a_1 A) / a_0$, da cui moltiplicando per A^{-1} , si ottiene $A^{-1} = -(a_n A^{n-1} + \dots + a_1 I_n) / a_0$.

Il teorema dice anche che ogni polinomio in A è uguale ad un polinomio in A di grado $\leq n-1$.

Infatti, sia $p(A)$ un polinomio in A , e sia $p(\lambda)$ il corrispondente polinomio in λ , se dividiamo $p(\lambda)$

per $p_A(\lambda)$ otteniamo un quoziente $q(\lambda)$ e un resto $r(\lambda)$ di grado minore del grado di $p_A(\lambda)$, dall'uguaglianza $p(\lambda) = p_A(\lambda)q(\lambda) + r(\lambda)$, sostituendo λ con A abbiamo $p(A) = p_A(A)q(A) + r(A)$, da cui, tenuto conto che $p_A(A) = \underline{0}_n$, otteniamo $p(A) = r(A)$.

