# Autovalori e autovettori

# Alcune considerazioni geometriche

Si consideri nel piano riferito ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali la retta r: y-2x=0. La simmetria ortogonale rispetto ad r manda il punto P =(x,y) nel punto P' di coordinate: $\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y \\ y' = \frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y \end{cases}$.

Se si prendono come assi cartesiani rispettivamente la retta r e la retta s ortogonale ad r passante per l'origine, la simmetria rispetto ad r manda il punto Q che nel nuovo riferimento ha coordinate (x,y) nel punto Q' di coordinate: $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

In termini di spazi vettoriali il primo sistema rappresenta l'endomorfismo di $R^2$ (corrispondente alla simmetria ortogonale rispetto ad r, che è un sottospazio di dimensione 1 di $R^2$) rispetto alla base canonica di $R^2$, mentre il secondo sistema rappresenta lo stesso endomorfismo rispetto alla base data dai versori di r ed s.

- <u>Problema</u>: Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n. Quando e come è possibile scegliere una base di V in modo che l'endomorfismo f sia rappresentato in modo «semplice»?

# Autovettori e autovalori di un endomorfismo

Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su un campo K e $f:V \rightarrow V$ un endomorfismo di V.

- Un vettore $\underline{v} \in V$ è un *autovettore* per f se
  - $\underline{v} \neq \underline{0}$ e
  - esiste $\lambda \in K$ tale $f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$

  in tal caso $\underline{v}$ si chiama più precisamente *autovettore associato all'autovalore* $\lambda$.
- Se $\underline{v}$ è un autovettore per f associato all'autovalore $\lambda$, allora per ogni $k \in K-\{0\}$, $k\underline{v}$ è ancora un autovettore di f associato all'autovalore $\lambda$ .
- Gli autovettori di un endomorfismo f sono i vettori la cui direzione non è modificata da f (notate che nell'esempio iniziale le direzioni delle rette r ed s non erano modificate dalla simmetria ortogonale rispetto ad r)

# Alcuni richiami sui polinomi

- Sia p(x) un polinomio di grado n a coefficienti in K, un elemento $\alpha \in K$ si dice *radice* di p(x) se sostituendo $\alpha$ ad x e facendo i conti in K si ottiene come risultato 0. Il polinomio p(x) ha come radice $\alpha$ se e solo se $(x-\alpha)$ divide p(x) (*teorema di Ruffini*).
- La radice $\alpha$ si dice di *molteplicità* k se $(x-\alpha)^k$ divide p(x) ma $(x-\alpha)^{k+1}$ non divide p(x).
- *Teorema fondamentale dell'algebra*: Un polinomio p(x) di grado n nel campo complesso ammette n radici, purché ogni radice sia contata con la propria molteplicità. Quindi in C si ha $p(x)=a(x-\alpha_1)^{m1}(x-\alpha_2)^{m2}....(x-\alpha_s)^{ms}$ ove a è il coefficiente direttivo di p(x) e $m_1+m_2+...+m_s=n$. In R invece p(x) ha un numero di radici minore o uguale ad n e quindi non si decompone necessariamente nel prodotto di fattori lineari.
  - In generale un campo K si dice algebricamente chiuso se ogni polinomio p(x) di grado n nel campo K ammette n radici, purché ogni radice sia contata con la propria molteplicità. Quindi C è un campo algebricamente chiuso.

# Calcolo di autovettori e autovalori

Sia *B* una base di V. Sia A la matrice quadrata di ordine n che rappresenta l'endomorfismo f di V rispetto alla base *B*, ovvero $f(\underline{v}|_B)=A\underline{v}|_B$, dove è $\underline{v}|_B$ un vettore colonna con n componenti.

Per cercare gli autovettori di f si devono cercare i vettori non nulli $\underline{x}$ tali che $A\underline{x}=\lambda\underline{x}$ per qualche scalare $\lambda$, ovvero, poiché $\lambda\underline{x}=\lambda I_n\underline{x}$, le autosoluzioni del sistema lineare omogeneo $(A-\lambda I_n)\underline{x}=\underline{0}$.

- Il sistema ha autosoluzioni se e solo se $\det(A-\lambda I_n)=0$, dove $\det(A-\lambda I_n)$ è un polinomio di grado n nell'indeterminata $\lambda$, detto *polinomio caratteristico* di A (spesso indicato con $\chi_A(\lambda)$)
- Le autosoluzioni del sistema $(A-\lambda I_n)\underline{x}=0$ si chiamano *autovettori* di A.
- Le radici del polinomio caratteristico di A si chiamano *autovalori della matrice* A. Se un autovalore $\lambda$ di A ha molteplicità k come radice del polinomio caratteristico di A, si dice che $\lambda$ è un *autovalore di* A *con molteplicità algebrica* k. Tale molteplicità è indicata con $m_a(\lambda)$.

# Proprietà degli autovalori di A

- Per ogni autovalore $\lambda'$ di A, lo spazio vettoriale $V(\lambda')=\ker(A-\lambda' I_n)$ è detto *autospazio di* A *associato all'autovalore* $\lambda'$.

Indicato con $S(\lambda')$ l'insieme degli autovettori di A associati all'autovalore $\lambda'$, si ha $V(\lambda')=\{\underline{0}\}\cup S(\lambda')$.

- ➢ $\dim V(\lambda')=n-rk(A-\lambda' I_n)$
- ➢ La somma di autovettori associati all'autovalore $\lambda'$ è o un autovettore associato all'autovalore $\lambda'$ o il vettore nullo.

- La dim $V(\lambda')$ viene detta *molteplicità geometrica di* $\lambda'$ e indicata con $m_g(\lambda')$.
- Se $\lambda_1$ ed $\lambda_2$ sono due autovalori distinti allora $V(\lambda_1)\cap V(\lambda_2)=\{\underline{0}\}$
  - Sia $\underline{v}\in V(\lambda_1)\cap V(\lambda_2)$, allora $A\underline{v}=\lambda_1\underline{v}$, e $A\underline{v}=\lambda_2\underline{v}$, quindi $(\lambda_1-\lambda_2)\underline{v}=\underline{0}$ e quindi, essendo $\lambda_1-\lambda_2\neq 0$, si ha $\underline{v}=\underline{0}$.

Sia K un campo algebricamente chiuso e siano $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n$ gli n autovalori (anche in parte coincidenti) di A, allora si ha

$\det(A-\lambda I)=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)$ da cui si ricava

- $\det A= \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$.
- ➢ A è singolare se e solo se ha almeno un autovalore nullo.
- $\mathrm{tr}\, A=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}= \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$ (traccia di A)

# Sommario

Abbiamo visto:

- cosa sono gli autovettori e gli autovalori di un endomorfismo;
- cosa è il polinomio caratteristico di una matrice quadrata A, cosa sono e come si calcolano i suoi autovalori e i suoi autovettori;
- cosa sono le molteplicità algebriche e geometriche di un autovalore;
- come sono legati gli autovalori di una matrice al suo determinante e alla sua traccia.