Spazi euclidei

Spazi euclidei: definizione

- Sia V uno spazio vettoriale sul campo R, si dice *prodotto scalare* una funzione $V \times V \rightarrow R$ che ad ogni coppia di vettori $\underline{v}$, $\underline{w} \in V$ associa un numero reale $<\underline{v},\underline{w}>$ tale che valgano le seguenti proprietà:
  - *Commutatività*: per ogni $\underline{v},\underline{w} \in V$, $<\underline{v},\underline{w}>=<\underline{w},\underline{v}>$,
  - *Linerità a sinistra*: per ogni $\underline{v},\underline{w},\underline{u} \in V$ e per ogni $t \in R$, $<\underline{v}+\underline{w},\underline{u}>=<\underline{v},\underline{u}>+<\underline{w},\underline{u}>$ e $<t\underline{v},\underline{w}>=t<\underline{w},\underline{v}>$,
  - *Positività*: per ogni $\underline{v} \in V$, $<\underline{v},\underline{v}> \geq 0$ e $<\underline{v},\underline{v}>= 0$ se e solo se $\underline{v}= \underline{0}$.
- ➢ La linearità a sinistra può essere scritta nella forma equivalente: per ogni $\underline{v},\underline{w},\underline{u} \in V$ e per ogni $t,r \in R$, $<t\underline{v}+r\underline{w},\underline{u}>=t<\underline{v},\underline{u}>+r<\underline{w},\underline{u}>$
- ➢ La commutatività implica che linearità a sinistra e a destra siano equivalenti, per cui il prodotto scalare risulta una funzione bilineare.
- ➢ In R^n, $<\underline{x},\underline{y}>=x^T y=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ (ove $\underline{x}=[x_1,x_2, \dots , x_n]^T$, $\underline{y}=[y_1,y_2, \dots , y_n]^T$) è detto prodotto scalare standard.
- Uno *spazio euclideo* è uno spazio vettoriale su R dotato di prodotto scalare.

Norma, versori, ortogonalità

Sia V uno spazio euclideo

- si dice *norma* di $\underline{v} \in V$, il numero reale $\|\underline{v}\|=\sqrt{<\underline{v},\underline{v}>}$
  - *omogeneità della norma*, per ogni $t \in R$, $\underline{v} \in V$ $\|t\underline{v}\|=|t|\|\underline{v}\|$,
  - *annullamento della norma*, $\|\underline{v}\|=0$ se e solo se $\underline{v}=\underline{0}$.
- un *versore* è un vettore di norma 1,
- due vettori $\underline{v}$ e $\underline{w}$ si dicono *ortogonali* se $<\underline{v},\underline{w}>=0$
  - $\underline{0}$ è ortogonale ad ogni vettore.

Teorema di Carnot: Per ogni $\underline{v},\underline{w} \in V$, $\|\underline{v}+\underline{w}\|^2=\|\underline{v}\|^2+\|\underline{w}\|^2+2<\underline{v},\underline{w}>$.

- Applicare la bilinearità del prodotto scalare su $<\underline{v}+\underline{w},\underline{v}+\underline{w}>$

Teorema di Pitagora: Se $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono ortogonali, allora $\|\underline{v}+\underline{w}\|^2=\|\underline{v}\|^2+\|\underline{w}\|^2$.

Formula di polarizzazione: $<\underline{v},\underline{w}>=\frac{1}{2}\left(\|\underline{v}+\underline{w}\|^2-\|\underline{v}\|^2-\|\underline{w}\|^2\right)$, per ogni $\underline{v},\underline{w} \in V$.

Proiezione ortogonale di un vettore nella direzione di un altro vettore.

Sia V uno spazio euclideo

- siano $\underline{v},\underline{w} \in V$, la *distanza* fra $\underline{v}$ e $\underline{w}$ è $\|\underline{v}-\underline{w}\|$
- siano $\underline{b} \in V$ ed $L=L(\underline{b})=R\underline{b}$; per ogni $\underline{v} \in V$ la *proiezione ortogonale* $\underline{v}_L$ di $\underline{v}$ sullo spazio L è un vettore tale che
  - $\underline{v}_L \in L$
  - $\underline{v} - \underline{v}_L$ è ortogonale a $\underline{b}$
  - $\underline{v}_L$ è il vettore di L che ha minima distanza da $\underline{v}$.
- Si ha $\underline{v}_L = \dfrac{\langle \underline{v},\underline{b} \rangle}{\|\underline{b}\|^2}\underline{b}$ e il numero reale $\dfrac{\langle \underline{v},\underline{b} \rangle}{\|\underline{b}\|^2}$ si chiama *coefficiente di Fourier* di $\underline{v}$ rispetto a $\underline{b}$
  - Ovviamente $\underline{v}_L \in L$, inoltre $\langle \underline{v}-\underline{v}_L , \underline{b} \rangle = 0$.
    Sia $\underline{w} \in L$, allora $\|\underline{v}-\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}-\underline{v}_L+\underline{v}_L-\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}-\underline{v}_L\|^2 + \|\underline{v}_L-\underline{w}\|^2 \geq \|\underline{v}-\underline{v}_L\|^2$.

Angolo fra due vettori

Sia V uno spazio euclideo

<u>Disuguaglianza di Schwarz</u>: Per ogni $v,w \in V$ si ha $|\langle \underline{v},\underline{w}\rangle| \leq \|\underline{v}\|\|\underline{w}\|$ e sussiste l'uguaglianza se e solo se $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono linearmente dipendenti.

- Per $\underline{w}=\underline{0}$ entrambi i membri sono 0. Sia allora $\underline{w}\neq\underline{0}$.
  $$\|\underline{v}\|^2 = \left\|\underline{v}-\frac{\langle \underline{v},\underline{w}\rangle}{\|\underline{w}\|^2}\underline{w}+\frac{\langle \underline{v},\underline{w}\rangle}{\|\underline{w}\|^2}\underline{w}\right\|^2 = \left\|\underline{v}-\frac{\langle \underline{v},\underline{w}\rangle}{\|\underline{w}\|^2}\underline{w}\right\|^2+\left\|\frac{\langle \underline{v},\underline{w}\rangle}{\|\underline{w}\|^2}\underline{w}\right\|^2 \geq \left\|\frac{\langle \underline{v},\underline{w}\rangle}{\|\underline{w}\|^2}\underline{w}\right\|^2 = \frac{|\langle \underline{v},\underline{w}\rangle|}{\|\underline{w}\|^2}$$

➢ $-1 \leq \frac{\langle \underline{v},\underline{w}\rangle}{\|\underline{v}\|\|\underline{w}\|} \leq 1$

- Chiamiamo *angolo* fra $\underline{v}$ e $\underline{w}$ l'angolo θ tale che $\cos\theta = \frac{\langle \underline{v},\underline{w}\rangle}{\|\underline{v}\|\|\underline{w}\|}$.

<u>Disuguaglianza triangolare</u> : Per ogni $v,w \in V$ si ha $\|\underline{v}+\underline{w}\| \leq \|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|$ e l'uguaglianza sussiste se e solo se $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono paralleli ed equiversi.

- $\|\underline{v}+\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2+\|\underline{w}\|^2+2\langle \underline{v},\underline{w}\rangle \leq \|\underline{v}\|^2+\|\underline{w}\|^2+|2\langle \underline{v},\underline{w}\rangle| \leq \|\underline{v}\|^2+\|\underline{w}\|^2+2\|\underline{v}\|\|\underline{w}\| = (\|\underline{v}\|+\|\underline{w}\|)^2$

Osservazione

Potremmo definire la norma in modo indipendente dal prodotto scalare

- Sia V uno spazio vettoriale su R. Si chiama *norma* una funzione $f: V \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni vettore $\underline{v} \in V$ un numero reale non negativo $\|\underline{v}\|$ tale che valgano le proprietà:
  - *Omogeneità*: per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per ogni $\underline{v} \in V$, $\|t\underline{v}\| = |t|\,\|\underline{v}\|$,
  - *Annullamento*: $\|\underline{v}\| = 0$ se e solo se $\underline{v} = 0$
  - *Disuguaglianza triangolare*: per ogni $\underline{v}, \underline{w} \in V$, $\|\underline{v}+\underline{w}\| \leq \|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|$
- Uno spazio vettoriale dotato di norma si dice *spazio metrico* (o meglio normato).
- La formula di polarizzazione
  $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \frac{1}{2}\left(\|\underline{v}+\underline{w}\|^2 - \|\underline{v}\|^2 - \|\underline{w}\|^2\right)$, per ogni $\underline{v}, \underline{w} \in V$,
  potrebbe essere usata per definire il prodotto scalare ma in generale non soddisfa le condizioni richieste dalla definizione di prodotto scalare, quindi uno spazio euclideo è metrico ma non viceversa.

Basi ortogonali e ortonormali

Sia V uno spazio euclideo di dimensione finita n.

- Un insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali è un insieme di vettori linearmente indipendenti.
  - Sia $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_h\}$ un insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali e sia $a_1\underline{v}_1+a_2\underline{v}_2+\dots+a_h\underline{v}_h=\underline{0}$. Per ogni $\underline{v}_i$ si ha $<a_1\underline{v}_1+a_2\underline{v}_2+\dots+a_h\underline{v}_h,\underline{v}_i> = =a_1<\underline{v}_1,\underline{v}_i> +\dots+a_i<\underline{v}_i,\underline{v}_i>+\dots+a_h<\underline{v}_h,\underline{v}_i> =a_i<\underline{v}_i, \underline{v}_i>=0$ da cui $a_i=0$.

<u>Teorema di Pitagora generalizzato</u>: Sia $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_h\}$ un insieme di vettori a due a due ortogonali, allora $||\underline{v}_1+\underline{v}_2+\dots+\underline{v}_h||^2= ||\underline{v}_1||^2+||\underline{v}_2||^2+\dots+||\underline{v}_h||^2$

- Una base $\{\underline{b}_1,\underline{b}_2,\dots,\underline{b}_h\}$ di V formata da vettori a due a due ortogonali si dice *base ortogonale*, in altre parole una base $\{\underline{b}_1,\underline{b}_2,\dots,\underline{b}_h\}$ è una base ortogonale di V se e solo se $<\underline{b}_i,\underline{b}_j>=0$ per ogni $i\neq j$.
  - Le coordinate di un qualsiasi vettore $\underline{v}\in V$ rispetto alla base ortogonale $\{\underline{b}_1,\underline{b}_2,\dots,\underline{b}_h\}$ sono i coefficienti di Fourier di $\underline{v}$ rispetto ai vettori della base.
- Una base ortogonale $\{\underline{q}_1,\underline{q}_2,\dots,\underline{q}_h\}$ di V formata da versori si dice *base ortonormale*, in altre parole una base $\{\underline{q}_1,\underline{q}_2,\dots,\underline{q}_h\}$ è una base ortonormale se e solo $<\underline{q}_i,\underline{q}_j>=\delta_{ij}$, con $\delta_{ij}=0$ quando $i\neq j$ e $\delta_{ij}=1$ quando $i=j$

Proprietà delle basi ortonormali

Sia V uno spazio euclideo con base $B=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_h\}$. Per ogni $\underline{v},\underline{w}\in V$, si ha $<\underline{v},\underline{w}>=(v|_B)^T C\, w|_B$ ove C è la matrice con elementi $c_{ij} =<v_i,v_j>$.

- C è una matrice reale simmetrica con elementi diagonali positivi.

- Se V è riferito ad una base ortonormale $U=\{\underline{q}_1,\underline{q}_2,\dots,\underline{q}_h\}\}$ allora
  - Per ogni $\underline{v}\in V$, $\underline{v}|_U=[<\underline{v},\underline{q}_1>,<\underline{v},\underline{q}_2>,\dots,<\underline{v},\underline{q}_n>]^T$
  - Per ogni $\underline{v}\in V$, $\|\underline{v}\|=\sqrt{<\underline{v},\underline{q}_1>^2 + <\underline{v},\underline{q}_2>^2 \;\dots + <\underline{v},\underline{q}_n>^2}$
  - Per ogni $\underline{v},\underline{w}\in V$, $<\underline{v},\underline{w}>=(v|_U)^T w|_U$

  In altre parole se V è riferito a una base ortonormale, il prodotto scalare (e la norma) di vettori rispetto a quella base diventa il prodotto scalare (e la norma) standard di R^n.

- Sia U una matrice reale quadrata di ordine n, U è formata dall'accostamento dei vettori di una base ortonormale di V se e solo se $U^TU=I_n$.

Matrici ortogonali

- Una matrice U, quadrata di ordine n, si dice *ortogonale* se è reale e $U^TU=I_n$.
  - U è formata dall'accostamento dei vettori di una base ortogonale di R^n
  - det $U=\pm1$, quindi U è invertibile e $U^{-1}=U^T$, dunque U^{-1} è ortogonale e $UU^T=I_n$
  - se U e Q sono ortogonali dello stesso ordine, allora UQ è ortogonale
- Ci sono due soli tipi di matrici ortogonali di ordine 2:
$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}.$$
  - le matrici del primo tipo hanno determinante 1, non hanno autovalori reali e rappresentanonel piano una rotazione attorno all'origine di un angolo θ.
  - le matrici del secondo tipo hanno determinante −1, autovalori 1 e −1 e rappresentano una simmetria rispetto alla retta che è l'autospazio relativo all'autovalore 1, che risulta essere lo spazio generato da $\begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}$; l'autospazio associato all'autovalore -1 è invece generato da $\begin{bmatrix}-\sin\frac{\theta}{2}\\ \cos\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}$.

Proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio

Siano V uno spazio euclideo, H un suo sottospazio.

- Un vettore $\underline{w}$ si dice *ortogonale* ad H se è ortogonale a ogni vettore di H.
  - Se H ha dimensione finita, $\underline{w}$ è ortogonale ad H se e solo se è ortogonale a tutti i vettori di una base di H.
- Se $\underline{v}=\underline{v}_H+\underline{v}^{\perp}$ con $\underline{v}_H \in H$ e $\underline{v}^{\perp}$ ortogonale ad H, $\underline{v}_H$ si chiama *proiezione ortogonale* di $\underline{v}$ su H.
  - $\underline{v}_H$ è il vettore di H a distanza minima da $\underline{v}$
  - $\underline{v}_H$ è l'unico vettore di H tale che $\underline{v}-\underline{v}_H$ è ortogonale ad H
  - Se H ha dimensione finita e $\{\underline{b}_1,\underline{b}_2,\ldots,\underline{b}_d\}$ è una sua base ortogonale, allora $\underline{v}_H=\frac{<\underline{v},\underline{b}_1>}{\|\underline{b}_1\|^2}\underline{b}_1+\frac{<\underline{v},\underline{b}_2>}{\|\underline{b}_2\|^2}\underline{b}_2+\ldots+\frac{<\underline{v},\underline{b}_d>}{\|\underline{b}_d\|^2}\underline{b}_d$
    - Basta mostrare che $\underline{v}-\underline{v}_H$ è ortogonale ad ogni $\underline{b}_i$.

Algoritmo di Gram-Schmidt

- Siano V uno spazio euclideo e $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_h$ vettori linearmente indipendenti di V, allora i vettori

$$\underline{b}_1=\underline{v}_1,$$

$$\underline{b}_2=\underline{v}_2-\frac{<\underline{v}_2,\underline{b}_1>}{\|\underline{b}_1\|^2}\,\underline{b}_1$$

…

$$\underline{b}_h=\underline{v}_h-\left(\frac{<\underline{v}_h,\underline{b}_1>}{\|\underline{b}_1\|^2}\,\underline{b}_1+\frac{<\underline{v}_h,\underline{b}_2>}{\|\underline{b}_2\|^2}\,\underline{b}_2+\ldots+\frac{<\underline{v}_h,\underline{b}_{h-1}>}{\|\underline{b}_{h-1}\|^2}\,\underline{b}_{h-1}\right)$$

sono una base ortogonale per $L(\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_h)$.

  - Da ogni vettore $\underline{v}_i$ ($2\leq i\leq h$) si toglie la proiezione ortogonale di $\underline{v}_i$ su $L(\underline{b}_1,\underline{b}_2,\ldots,\underline{b}_{i-1}\}$ e quindi, per le proprietà della proiezione ortogonale, si trova un vettore ortogonale a tale sottospazio, e quindi a tutti i suoi generatori.

➢ Se $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\ldots,\underline{v}_h\}$ è una base di H, allora $\{\underline{b}_1,\underline{b}_2,\ldots,\underline{b}_h\}$ è una base ortogonale di H, da cui si può ottenere una base ortonormale di H dividendo ogni $\underline{b}_i$ per la sua norma.

Sommario

Abbiamo visto

- come introdurre «misure» in uno spazio vettoriale, attraverso le nozioni di prodotto scalare e norma
- cosa è uno spazio euclideo
- cosa sono le basi ortogonali e le basi ortonormali di uno spazio euclideo di dimensione finita
- l'algoritmo di Gram-Schmidt da cui segue che
  - ogni spazio euclideo di dimensione finita, ammette una base ortonormale
- come il prodotto scalare e quindi la norma si riducano sempre a prodotto scalare e norma standard, quando lo spazio euclideo è riferito a una base ortonormale.