

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Appello 25 Settembre 2014		
Cognome:	Nome:	Matricola:

Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati.

1. Fissato un sistema di riferimento ortonormale \mathcal{B}_O nello spazio, consideriamo la retta

$$r|_{\mathcal{B}_O} : \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases} .$$

1. Verificare che r e l'asse y sono sghembi.
2. Trovare l'equazione della quadrica Q ottenuta dalla rotazione di r attorno all'asse y .
3. Scrivere un'equazione canonica di Q e riconoscerla. Determinare eventuali centro e assi di simmetria di Q .

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE		
Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Appello 25 Settembre 2014		
Cognome:	Nome:	Matricola:

2. Sia $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonica di \mathbb{R}^3 e $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ una applicazione lineare tale che

$$T(\mathbf{e}_1) = (1, 1, 0, 0), \quad T(\mathbf{e}_2) = (0, 1, 1, -1), \quad T(\mathbf{e}_3) = (1, 0, -1, 1).$$

1. Dire se T esiste e se è unica.
2. Calcolare $T((a, b, c))$.
3. Trovare la dimensione ed una base del nucleo e dell'immagine di T .

ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE		
Politecnico di Milano – Ingegneria informatica – Appello 25 Settembre 2014		
Cognome:	Nome:	Matricola:

3. Dato $k \in \mathbb{R}$, sia

$$A_k = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ k & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Trovare i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile su \mathbb{R} .
2. Trovare i valori di k per i quali A_k è ortogonalmente diagonalizzabile.
3. Per i valori di k di cui al punto precedente individuare una matrice ortogonale Q che diagonalizza A_k .

Soluzioni

1. 1. L'asse y è la retta di equazioni

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

L'asse y e la retta r non si intersecano, in quanto il sistema

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

non ha soluzione. Per ottenere una rappresentazione parametrica di r possiamo risolvere il sistema lineare che la definisce rispetto alle coordinate x, z :

$$\begin{cases} 2x + z = 1 + y \\ x - z = 2 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 2 - y \\ 3z = -3 + 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ z = -1 + y \end{cases}.$$

Prendendo come parametro la coordinata y , arriviamo a

$$r_{B_O} : (x(t), y(t), z(t)) = (1, 0, -1) + t(0, 1, 1).$$

Segue che r non è parallela all'asse y , che ha vettore direttore $(0, 1, 0)$, quindi le due rette sono sghembe.

2. Ruotando r rispetto all'asse y otteniamo l'iperboloide ad una falda \mathcal{Q} descritto dal sistema di equazioni:

$$\begin{cases} y = y_0 \\ x^2 + z^2 = x_0^2 + z_0^2 \\ x_0 = 1 \\ y_0 = t \\ z_0 = -1 + t \end{cases} \Rightarrow \mathcal{Q}|_{B_O} : x^2 - y^2 + z^2 + 2y - 2 = 0.$$

3. Per ottenere un'equazione canonica della quadrica è sufficiente osservare che

$$\mathcal{Q}|_{B_O} : x^2 - (y - 1)^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Definiamo il nuovo sistema di riferimento \tilde{B}_O dato dalla traslazione

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y - 1 \\ Z = z \end{cases} \Rightarrow \mathcal{Q}|_{\tilde{B}_O} : X^2 - Y^2 + Z^2 - 1 = 0.$$

Il centro C di \mathcal{Q} ha coordinate

$$C|_{B_O} = (0, 1, 0).$$

Gli assi di simmetria di \mathcal{Q} sono le rette passanti per C e parallele agli assi coordinati x, y, z .

2. 1. T è definita attraverso la sua azione sugli elementi di una base di \mathbb{R}^3 (la base canonica). Pertanto, per la formula di interpolazione T esiste ed è unica.
2. Grazie alla linearità di T abbiamo

$$T((a, b, c)) = T(a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3) = aT(\mathbf{e}_1) + bT(\mathbf{e}_2) + cT(\mathbf{e}_3) = (a+c, a+b, b-c, -b+c).$$

3. Per definizione,

$$\ker(T) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid T((a, b, c)) = (0, 0, 0, 0)\}.$$

Di conseguenza è necessario risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + b = 0 \\ b - c = 0 \\ -b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -c \\ b = c \end{cases} \Rightarrow (a, b, c) = c(-1, 1, 1). \quad (1)$$

Segue che

$$\ker(T) = \mathcal{L}((-1, 1, 1)), \quad \dim(\ker(T)) = 1.$$

Per il teorema di Rouchè-Capelli si ha $\dim(\text{Im}(T)) = 3 - 1 = 2$. L'immagine di T è generata dai vettori $\{T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2), T(\mathbf{e}_3)\}$. Per ottenere una sua base è sufficiente scegliere tra questi vettori due linearmente indipendenti, ad esempio $\mathcal{B} = \{T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2)\}$.

3. 1. Il polinomio caratteristico di A_k è:

$$P_k(\lambda) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 & 0 \\ k & -2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)((2 + \lambda)^2 - k) = (2 - \lambda)(2 + \lambda + \sqrt{k})(2 + \lambda - \sqrt{k}).$$

Di conseguenza gli autovalori sono:

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2 - \sqrt{k}, \quad \lambda_3 = -2 + \sqrt{k}.$$

- Se $k < 0$, i due autovalori λ_2, λ_3 non sono reali, pertanto A_k non è diagonalizzabile su \mathbb{R} .
- Se $k \neq 0, 16$ gli autovalori sono distinti e quindi A è diagonalizzabile.
- Se $k = 0$ si ha $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$. L'autospazio associato è

$$V_{-2} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Per il teorema di Rouchè-Capelli si ha $\dim(V_{-2}) = 3 - 2 = 1$, quindi la molteplicità geometrica dell'autovalore è 1 ed A_0 non è diagonalizzabile.

- Se $k = 16$ si ha $\lambda_1 = \lambda_3 = 2$. L'autospazio associato è

$$V_2 = \ker \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 16 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per il teorema di Rouchè-Capelli si ha $\dim(V_4) = 3 - 1 = 2$, quindi la molteplicità geometrica dell'autovalore è 2 ed A_{16} è diagonalizzabile.

2. Per il teorema spettrale, A_k è ortogonalmente diagonalizzabile rispetto al prodotto scalare canonico se e solo se è simmetrica, ovvero se e solo se $k = 1$.
3. Se $k = 1$, gli autovalori sono

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = -1,$$

con relativi autospazi

$$V_2 = \ker \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{L} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad V_{-3} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathcal{L} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$V_{-1} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \mathcal{L} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Dopo avere normalizzato gli autovettori si ottiene la matrice ortogonale Q che diagonalizza A :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$