Esame di Geometria e Algebra lineare
Politecnico di Milano – Ingegneria

Appello del 9 settembre 2013

1. (a) Determinare, al variare del parametro reale k, la dimensione del sottospazio vettoriale X di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\mathbf{x}_1 = (2, 1, k, -k), \qquad \mathbf{x}_2 = (k, 1, k, 2), \qquad \mathbf{x}_3 = (2k, k, 2k, 0).$$

   (b) Per $k = 1$, stabilire se il vettore $\mathbf{v} = (1, 1, -1, 2)$ appartiene al sottospazio X.

   Soluzione

   (a) La dimensione di X coincide col rango della matrice 3×4 formata dall'accostamento (per righe) dei tre vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ (che a sua volta coincide col rango della matrice 4×3 formata dall'accostamento per colonne dei trasposti dei tre vettori). La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k & -k \\ k & 1 & k & 2 \\ 2k & k & 2k & 0 \end{pmatrix}$$

   ha rango almeno 2 se $k \neq 0$, infatti il minore formato dalle ultime due righe e ultime due colonne è $-4k$. Il minore di ordine 3 formato dalle ultime tre colonne è $k(-k-2)(2-k)$ e pertanto la matrice ha rango 3 per $k \neq 0, 2, -2$. Per $k = 0$ l'ultima riga della matrice è nulla, ma il minore formato dalle prime righe e prime due colonne è non nullo per cui la matrice ha rango 2. Per $k = 2$ le prime tre righe della matrice sono proporzionali e quindi la matrice ha rango 2. Per $k = -2$ il minore formato dalla prima e dalle ultime due righe è diverso da 0 e la matrice ha rango 3.
   In conclusione dunque la dimensione dello spazio vettoriale generato dai vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ è 2 se $h = 0$ o $h = 2$ ed è 3 per tutti gli altri valori di h.

   (b) Per $k = 1$ il determinante della matrice formato dall'accostamento (per righe) dei tre $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ e del vettore $\mathbf{v}$ è diverso da 0 quindi i quattro vettori sono linearmente indipendenti e $\mathbf{v}$ non appartiene ad X.

2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (2x - y + z, -x + y - z, x - y + 2z).$$

   (a) Scrivere la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinare gli autovalori di f e i corrispondenti autospazi e dire se f è diagonalizzabile.

(c) Stabilire se f è invertibile e in caso affermativo dire se f^{-1} è diagonalizzabile.

(d) Verificare che f è un automorfismo e determinare l'applicazione inversa $f^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

(e) Stabilire se esiste un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g \circ f = f^{-1}$ e in caso affermativo determinarla.

Soluzione

(a) La matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) L'applicazione lineare f è diagonalizzabile in quanto la matrice A è reale simmetrica. Il polinomio caratteristico di A è $(1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 1)$ per cui gli autovalori di A (e quindi di f) sono 1, $2+\sqrt{3}$ e $2-\sqrt{3}$. L'autospazio associato all'autovalore 1 è $\{(h, 0, -h)^t \mid h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Gli autospazi associati ai due autovalori $2 \pm \sqrt{3}$ sono $\{(k, (1 \mp \sqrt{3})k, k)^t \mid k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.

(c) Il determinante di A è 1, quindi A ed f sono invertibili, inoltre f^{-1} è diagonalizzabile perché è rappresentata da A^{-1} che, essendo l'inversa di una matrice simmetrica, è simmetrica.

(d) f è un endomorfismo invertibile e pertanto è un automorfismo (infatti $ker(f) = \{0\}$ e $Imf = \mathbb{R}^3$). L'applicazione inversa $f^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è rappresentata rispetto alla base canonica dalla matrice inversa di A ed è quindi $f^{-1}(x, y, z) = (x - y, -x + 3y - z, -y + z)$.

(e) L'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g \circ f = f^{-1}$ è $g = f^{-2}$ e dunque $g(x, y, z) = (2x - 4y + z, -4x + 11y - 4z, x - 4y + 2z)$.

3. Sia Q il luogo dei punti P dello spazio tali che

$$d(P, F) = 2d(P, \pi)$$

dove $F = (1, -1, -1)$ e $\pi : \; x - y + 1 = 0$.

(a) Trovare l'equazione di Q.

(b) Verificare che Q è una quadrica e riconoscerla.

(c) Scrivere un'equazione canonica di Q.

(d) Verificare che Q è a centro e di rotazione.

(e) Determinare il centro C, l'asse di rotazione a e i vertici di Q.

(f) Verificare che il punto F appartiene all'asse a e determinare il raggio della circonferenza che si ottiene intersecando Q con il piano π' passante per F e ortogonale ad a.

(g) Stabilire se esiste una rototraslazione che porta la quadrica Q nella quadrica

$$Q': \ 3x^2 - y^2 - z^2 + 6x + 4y + 2z - 8 = 0.$$

Soluzione

(a) Q è il luogo dei punti dello spazio che soddisfano l'equazione

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2} = 2\frac{|x-y+1|}{\sqrt{2}}$$

da cui si ottiene $x^2 + y^2 - z^2 - 4xy + 6x - 6y - 2z - 1 = 0$.

(b) Q essendo rappresentata da una equazione di secondo grado in x, y, z è una quadrica. Alla quadrica Q sono associate le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di A sono -1, contato due volte, e 3. Il determinante di B è -18, per cui la quadrica è un iperboloide ellittico.

(c) L'equazione canonica di Q è $x^2 + y^2 - 3z^2 + 6 = 0$.

(d) La quadrica, essendo un iperboloide ellittico, è a centro ed è di rotazione perché ha un autovalore doppio.

(e) Il centro di Q è la soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = (-3, 3, 1)^t$ ed è quindi il punto di coordinate $(-1, 1, -1)$. L'asse di rotazione ha la direzione del generatore dell'autospazio associato all'autovalore semplice e passa per il centro. L'autospazio dell'autovalore 3 è $\{(h, -h, 0)^t \mid h \in R \setminus \{0\}\}$ quindi l'asse di rotazione di Q ha equazioni parametriche $x = -1 + t$, $y = 1 - t$, $z = -1$. I vertici di Q sono le intersezioni fra l'asse di rotazione e Q ed hanno dunque coordinate $(0, 0, -1)$, $(-12, 12, -1)$.

(f) Le coordinate del punto F soddisfano l'equazione dell'asse (per $t = 2$) dunque F appartiene all'asse. Il piano π' ha equazione $x - y = 2$ ed è parallelo a π. Un qualsiasi punto di π', e quindi ogni punto P della circonferenza che si ottiene intersecando Q con il piano π', ha distanza $\frac{3}{\sqrt{2}}$ da π e quindi P, appartenendo a Q, ha distanza $3\sqrt{2}$ da F. La distanza di P da F è il raggio della circonferenza.

(g) Esiste una rototraslazione che porta Q in Q' se e solo se Q e Q' hanno la stessa forma canonica. Alla quadrica Q' sono associate le due matrici

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e } B' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di A' coincidono con gli autovalori di A e si ha $detB' = -18 = detB$, pertanto le due quadriche hanno la stessa forma canonica e quindi esiste una rototraslazione che porta Q in Q'.