

Un po' di algebra delle matrici

Terminologia

- Una tabella A di $m \times n$ elementi di un campo K disposti su m righe ed n colonne si dice *matrice di tipo* (m,n)
- L'elemento di K che appartiene alla i -esima riga e alla j -esima colonna di A si indica con a_{ij} , e la matrice si scrive nella forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

- Si dicono *vettore riga* e *vettore colonna* rispettivamente le matrici di tipo $(1,n)$ ed $(m,1)$.
- Una matrice di tipo (m,n) può essere vista come l'accostamento orizzontale di n vettori colonna, detti colonne della matrice, o come l'accostamento verticale di m vettori riga, detti righe della matrice .
- Una matrice di tipo (n,n) si dice *matrice quadrata* di ordine n .

Terminologia

- Sia A una matrice di tipo (m,n) si chiama *trasposta* di A e si indica con A^T (o A^r , tA ; etc) la matrice di tipo (n,m) che si ottiene da A scambiando le righe con le colonne (in altre parole l'elemento di posto (i,j) di A^T è a_{ji}).
- Si chiamano *elementi diagonali* di una matrice quadrata A gli elementi a_{ii} , l'insieme di questi elementi si chiama *diagonale principale* di A .
- Una matrice quadrata A si chiama *diagonale* se $a_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$, si scrive allora $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$
- Una matrice quadrata A si chiama *triangolare alta (bassa)* se $a_{ij} = 0$ per ogni $i > j$ ($i < j$).
 - Una matrice quadrata è diagonale se e solo se è triangolare alta e bassa.
- Una matrice si dice *simmetrica* se $A = A^T$ ed *emisimmetrica* se $A = -A^T$.
 - Gli elementi diagonali di una matrice emisimmetrica sono uguali a 0.

Terminologia

- Siano R_1, R_2, \dots, R_m le righe di una matrice A . Se R_i è una riga non nulla si chiama *pivot* di R_i il suo primo elemento non nullo (cioè l'elemento non nullo con minimo indice di colonna)
- La matrice A si dice *matrice a scala* quando
 - Se R_i è il vettore zero anche R_{i+1} è il vettore zero.
 - Se R_j e R_{j+1} non sono nulle, la colonna cui appartiene il pivot di R_j precede (non necessariamente immediatamente) la colonna del pivot di R_{j+1} .
 - Una matrice triangolare alta con tutti gli elementi diagonali non nulli è una matrice a scala
 - Una matrice a scala quadrata è triangolare alta
- Si chiama *matrice nulla* di tipo (m,n) , e si indica con $\underline{0}_{(m,n)}$, una matrice di tipo (m,n) con tutti gli elementi uguali a 0
- Si chiama *matrice identica* di ordine n , una matrice diagonale di ordine n che ha tutti gli elementi diagonali uguali ad 1

Somma di matrici e prodotto scalare matrice

- Due matrici $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ sono *uguali* se sono dello stesso tipo e per ogni posto (i,j) $a_{ij}=b_{ij}$.
 - Siano $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ due matrici dello stesso tipo (m,n) , $C=A+B$ è la matrice $[c_{ij}]$ di tipo (m,n) dove $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.
 - Rispetto alla somma, sopra definita, l'insieme delle matrici dello stesso tipo (m,n) su un campo K formano un gruppo abeliano,
 - l'elemento neutro è la matrice $\underline{0}_{(m,n)}$,
 - l'opposto della matrice $A = [a_{ij}]$ è la matrice $-A = [-a_{ij}]$.
 - Siano $k \in K$ ed $A = [a_{ij}]$, allora $kA = [ka_{ij}]$.
- Rispetto alla somma e al prodotto scalare matrice, sopra definiti, l'insieme delle matrici dello stesso tipo (m,n) su un campo K formano uno spazio vettoriale su K .

Prodotto (righe per colonne) di matrici

- Si chiama *matrice prodotto* (righe per colonne) di una matrice $A = [a_{ij}]$ di tipo (m,n) e di una matrice $B = [b_{hk}]$ di tipo (n,p) una matrice $C = [c_{rs}]$ di tipo (m,p) definita nel modo seguente

$$c_{rs} = \sum_{i=1}^n a_{ri} b_{is} = a_{r1} b_{1s} + a_{r2} b_{2s} + \dots + a_{rn} b_{ns}$$

- L'elemento c_{rs} di C è il prodotto (righe per colonne) delle r -esima riga di A (vista come una matrice di tipo $(1,n)$) con la s -esima colonna di B (vista come una matrice di tipo $(n,1)$)
- Il prodotto di matrici NON è commutativo.
 - I prodotti AB e BA sono definiti e dello stesso tipo se e solo se A e B sono matrici quadrate dello stesso ordine, ma anche in tale caso in generale $AB \neq BA$
 - Se $AB=BA$, le matrici A e B si dicono *permutabili*.
- Il prodotto di matrici gode della proprietà associativa.
 - Sia A una matrice quadrata ed n un intero positivo, poniamo $A^1=A$ ed $A^n=AA\dots A$ (n volte), si ha $A^n A^m = A^{n+m}$ e $(A^n)^m = A^{nm}$.

Proprietà del prodotto di matrici

- Per ogni $k \in K$, $k(AB) = A(kB) = (kA)B$
- Valgono le proprietà distributive (a sinistra e a destra) del prodotto rispetto alla somma:
 - $A(B+C) = AB+AC$ (con A di tipo (m,n) , B,C di tipo (n,p))
 - $(D+E)F = DF+EF$ (con D,E di tipo (m,n) , F di tipo (n,p))
- Se A è una matrice di tipo (m,n) , $\underline{0}_{(p,m)} A = \underline{0}_{(p,n)}$ e $A \underline{0}_{(n,q)} = \underline{0}_{(m,q)}$.
- Esistono matrici non nulle il cui prodotto è la matrice nulla
 - Esempio: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $AB=AC$ ($DA=EA$) NON implica $B=C$ ($D=E$)
- Per ogni matrice A di tipo (m,n) si ha $I_m A = A = A I_n$
 - Per definizione se A è quadrata di ordine n si pone $A^0 = I_n$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Metodo di Gauss

- Si chiamano *mosse di Gauss* o *operazioni elementari* sulle righe di una matrice le seguenti operazioni:

- scambiare due righe,
- sommare ad una riga un'altra riga,
- moltiplicare una riga per $k \neq 0$ ($k \in K$).

Queste due ultime mosse si possono riassumere nell'unica mossa di sommare ad una riga un'altra riga moltiplicata per $k \in K$.

- Esiste un algoritmo (*metodo di eliminazione di Gauss*) che con un numero finito di mosse di Gauss trasforma ogni matrice A in una matrice a scala

- Si scambiano le righe in modo che la prima riga sia quella col pivot più a sinistra
- Se il pivot della prima riga è in colonna j si somma alla riga i per ogni $i > 1$ la prima riga moltiplicata per $-a_{ij}/a_{1j}$, in tal modo tutte le righe, eccetto la prima, hanno tutti 0 nella colonna j (e tutte le righe hanno 0 nelle colonne h con $h < j$)
- Si ripete il procedimento sulla matrice A' ottenuta da A eliminandone la prima riga e si continua fino ad esaurire le righe o a trovare tutte righe nulle.

Matrici associate ad un sistema lineare

• Il sistema lineare
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$
 si può

scrivere nella forma $A\underline{x}=\underline{b}$ con:

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ *matrice dei coefficienti* del sistema,

- $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ *vettore delle incognite*

- $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ *vettore dei termini noti.*

- La matrice $C=[A|\underline{b}]$ formata dall'accostamento della colonna dei termini noti alla matrice dei coefficienti si chiama *matrice completa* del sistema

Sommario

Abbiamo imparato:

- cosa è una matrice e un po' di terminologia (matrici quadrate, matrici triangolari, matrici diagonali, matrice a scala, trasposta di una matrice, matrice simmetrica, matrice emisimmetrica, matrice nulla e matrice identica);
- somma di matrici e prodotto scalare matrice e loro proprietà → matrici di uno stesso tipo come spazi vettoriali;
- prodotto righe per colonne e relative proprietà;
- riduzione di una matrice in forma a scala col metodo di eliminazione di Gauss;
- come rappresentare un sistema lineare in forma matriciale.