

NOTA BENE. Questi appunti non sono esaustivi, non contengono tutto ciò che è stato detto a lezione/esercitazione; costituiscono una base minima di conoscenze necessarie a superare l'esame e possono essere utili per un ripasso veloce. Gli appunti contengono anche le dimostrazioni fatte a lezione.

Applicazioni lineari (Capitolo 5 dello Schlesinger e/o Capitolo 5 del Bernardi-Gimigliano)

Def 1: Siano V e W due spazi vettoriali sullo stesso campo K , una applicazione (funzione) $f: V \rightarrow W$ è una *applicazione lineare* se

1. per ogni $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ si ha $f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2)$
2. per ogni $\underline{v} \in V, t \in K$ si ha $f(t\underline{v}) = tf(\underline{v})$.

Proposizione 1: $f: V \rightarrow W$ è un'applicazione lineare se e solo se per ogni $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V, t_1, t_2 \in K$ si ha $f(t_1\underline{v}_1 + t_2\underline{v}_2) = t_1f(\underline{v}_1) + t_2f(\underline{v}_2)$

Dim: Se f è un'applicazione lineare $f(t_1\underline{v}_1 + t_2\underline{v}_2) = f(t_1\underline{v}_1) + f(t_2\underline{v}_2)$ per la 1. e $f(t_1\underline{v}_1) + f(t_2\underline{v}_2) = t_1f(\underline{v}_1) + t_2f(\underline{v}_2)$ per la 2. Viceversa se $f(t_1\underline{v}_1 + t_2\underline{v}_2) = t_1f(\underline{v}_1) + t_2f(\underline{v}_2)$, allora prendendo $t_1 = t_2 = 1$ si ha la 1., e prendendo $t_2 = 0$ si ha la 2.

Si ha immediatamente

Proposizione 2: Sia $f: V \rightarrow W$ è un'applicazione lineare. Allora per ogni $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V; t_1, t_2, \dots, t_n \in K$ si ha $f(t_1\underline{v}_1 + t_2\underline{v}_2 + \dots + t_n\underline{v}_n) = t_1f(\underline{v}_1) + t_2f(\underline{v}_2) + \dots + t_nf(\underline{v}_n)$.

Proposizione 3. Sia $f: V \rightarrow W$ è un'applicazione lineare. Allora $f(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$.

Dim. Per ogni $\underline{v} \in V$ si ha $f(\underline{v}) = f(\underline{v} + \underline{0}_V) = f(\underline{v}) + f(\underline{0}_V)$ ed anche $f(\underline{v}) = f(\underline{v}) + \underline{0}_W$, quindi $f(\underline{v}) + f(\underline{0}_V) = f(\underline{v}) + \underline{0}_W$ da cui $f(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$.

Esempi.

1. Sia A una matrice reale di tipo $(3,2)$. La funzione $f_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $f_A(\underline{v}) = A\underline{v}$ per ogni $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ è un'applicazione lineare. Infatti, per ogni $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \mathbb{R}^3, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ si ha $f_A(t_1\underline{v}_1 + t_2\underline{v}_2) = A(t_1\underline{v}_1 + t_2\underline{v}_2) = A(t_1\underline{v}_1) + A(t_2\underline{v}_2) = (t_1A)\underline{v}_1 + (t_2A)\underline{v}_2 = t_1(A\underline{v}_1) + t_2(A\underline{v}_2) = t_1f_A(\underline{v}_1) + t_2f_A(\underline{v}_2)$.
2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo K e sia B una base di V . L'applicazione $l_B: V \rightarrow K^n$ definita da $l_B(\underline{v}) = \underline{v}|_B$ per ogni $\underline{v} \in V$, è un'applicazione lineare: sappiamo infatti che $(\underline{v}_1 + \underline{v}_2)|_B = \underline{v}_1|_B + \underline{v}_2|_B$ e $(t\underline{v})|_B = t(\underline{v}|_B)$.
3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo K e siano B, C due basi di V . L'applicazione $f: K^n \rightarrow K^n$ definita da $f(\underline{v}|_B) = \underline{v}|_C$ per ogni $\underline{v} \in V$ (cambiamento di base nello spazio V), è un'applicazione lineare di K^n in K^n .
4. Siano V l'insieme delle funzioni in una variabile da \mathbb{R} in \mathbb{R} , derivabili su \mathbb{R} , e W l'insieme delle funzioni in una variabile da \mathbb{R} in \mathbb{R} . V e W formano due spazi vettoriali sul campo reale rispetto

alle solite operazioni di somma di funzioni e prodotto di scalare per funzione. La funzione $D:V \rightarrow W$ definita ponendo $D(g)=g'$ per ogni $g \in V$ è una applicazione lineare perché la derivata della somma è la somma delle derivate e la derivata di della funzione tg , con t numero reale e $g \in V$, è tg' .

5. Sia $M_n(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine n sul campo reale, che possono essere viste come spazio vettoriale con le solite operazioni di somma di matrici e di prodotto di uno scalare per una matrice, la funzione $\det: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ che associa ad ogni matrice A il suo determinante NON è una applicazione lineare, infatti né 1. né 2. sono verificate dalla funzione determinante.
6. Data una matrice quadrata A di ordine n si chiama *traccia di A*, $\text{tr } A$, la somma degli elementi diagonali di A . La funzione $\text{tr}: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ che associa ad ogni matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ la sua traccia è una applicazione lineare.

Def.2: Sia $f: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Sia $\underline{w} \in W$. Si chiama *fibra* di f sopra \underline{w} , l'insieme $f^{-1}(\underline{w})$ formato da tutti i $\underline{v} \in V$ tali che $f(\underline{v})=\underline{w}$ (cioè l'insieme di tutte e sole le controimmagini di \underline{w} mediante f) Si chiama $\ker f$ la fibra di f su $\underline{0}_W$; in altre parole si ha $\ker f = \{\underline{v} \in V \mid f(\underline{v})=\underline{0}_W\}$.

Proposizione 4. $\ker f$ è un sottospazio di V (ed è l'unica fibra di f che sia sottospazio).

Dim. Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \ker f$, allora $f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2) = \underline{0}_W + \underline{0}_W$, dunque $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in \ker f$. Siano $t \in K$ e $\underline{v} \in \ker f$, allora $f(t\underline{v}) = tf(\underline{v}) = t\underline{0}_W = \underline{0}_W$ e dunque $t\underline{v} \in \ker f$, quindi $\ker f$ è sottospazio per il criterio di sottospazio. Se $\underline{w} \neq \underline{0}_W$, la fibra di f su \underline{w} non contiene $\underline{0}_V$ e dunque non è un sottospazio di V

Oss. 1. La fibra di f su \underline{w} ($\neq \underline{0}_W$) può esser un insieme vuoto

Proposizione 5. Se \underline{v} appartiene alla fibra di f su \underline{w} , tutti e soli gli elementi della fibra di f su \underline{w} sono i vettori della forma $\underline{v} + \underline{v}_{\ker}$, dove \underline{v}_{\ker} è un qualunque vettore di $\ker f$.

Dim. Se \underline{v} appartiene alla fibra di f su \underline{w} , allora $f(\underline{v}) = \underline{w}$. Sia ora $\underline{v}_{\ker} \in \ker f$, allora $f(\underline{v}_{\ker}) = \underline{0}_W$ e dunque $f(\underline{v} + \underline{v}_{\ker}) = f(\underline{v}) + f(\underline{v}_{\ker}) = \underline{w} + \underline{0}_W = \underline{w}$, perciò $\underline{v} + \underline{v}_{\ker}$ appartiene alla fibra di f su \underline{w} . Viceversa, siano $\underline{v}, \underline{v}'$ appartenenti alla fibra di f su \underline{w} , cioè $f(\underline{v}) = f(\underline{v}') = \underline{w}$, allora $f(\underline{v}' - \underline{v}) = \underline{w} - \underline{w} = \underline{0}_W$. Quindi $\underline{v}' - \underline{v} \in \ker f$ e pertanto $\underline{v}' = \underline{v} + \underline{v}_{\ker}$, per qualche $\underline{v}_{\ker} \in \ker f$.

Def. 3. Un'applicazione lineare $f: V \rightarrow W$ si dice *iniettiva* se per ogni $\underline{v}, \underline{v}' \in V$, $\underline{v} \neq \underline{v}'$ implica $f(\underline{v}) \neq f(\underline{v}')$ o equivalentemente se $f(\underline{v}) = f(\underline{v}')$ implica $\underline{v} = \underline{v}'$.

Dalla Proposizione 5 si ricava immediatamente il seguente

Corollario 1. Un'applicazione lineare $f: V \rightarrow W$ è *iniettiva* se e solo se $\ker f = \{\underline{0}_V\}$.

Def. 4. Sia $f: V \rightarrow W$ è un'applicazione lineare. Sia U un sottoinsieme di V , poniamo $f(U) = \{\underline{w} \in W \mid f(\underline{u}) = \underline{w} \text{ per qualche } \underline{u} \in U\}$. Chiamiamo *immagine di f*, $\text{Im } f$, l'insieme $f(U)$.

Proposizione 6. Sia $f: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Se U un sottospazio di V , allora $f(U)$ è un sottospazio di W . Inoltre, se U ha dimensione finita, allora $\dim f(U) \leq \dim U$.

In particolare $\text{Im } f$ è un sottospazio di W e, se V ha dimensione finita, allora $\dim \text{Im } f \leq \dim V$.

Dim. Siano $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in f(U)$, allora esistono $\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U$ tali che $f(\underline{u}_1) = \underline{w}_1$ e $f(\underline{u}_2) = \underline{w}_2$. Quindi $\underline{w}_1 - \underline{w}_2 = f(\underline{u}_1) - f(\underline{u}_2) = f(\underline{u}_1 - \underline{u}_2) \in f(U)$ in quanto $\underline{u}_1 - \underline{u}_2 \in U$. Inoltre per ogni scalare t , si ha $t\underline{w}_1 = tf(\underline{u}_1) = f(t\underline{u}_1) \in f(U)$ in quanto $t\underline{u}_1 \in U$ e quindi per il criterio di sottospazio $f(U)$ è un sottospazio. Supponiamo ora che U abbia dimensione finita n . Sia allora $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n\}$ una base di U . Mostriamo che $\{f(\underline{b}_1), f(\underline{b}_2), \dots, f(\underline{b}_n)\}$ è un insieme di generatori (non necessariamente una base) di $f(U)$. Infatti per ogni $\underline{w} \in f(U)$, esiste $\underline{u} \in U$ tale che $\underline{w} = f(\underline{u})$. Ora $\underline{u} = x_1 \underline{b}_1 + \dots + x_n \underline{b}_n$ e quindi $\underline{w} = f(\underline{u}) = f(x_1 \underline{b}_1 + \dots + x_n \underline{b}_n) = x_1 f(\underline{b}_1) + \dots + x_n f(\underline{b}_n)$. Se poi consideriamo $\text{Im } f$, essendo $\text{Im } f = f(V)$ e V un sottospazio di se stesso, abbiamo subito che $\text{Im } f$ è un sottospazio di W di dimensione minore o uguale a quella di V , se V ha dimensione finita.

Def. 5. Un'applicazione lineare $f: V \rightarrow W$ si dice *suriettiva* se $\text{Im } f = W$.

Def. 6. Un'applicazione lineare $f: V \rightarrow W$ si dice *biiettiva o biunivoca* se è iniettiva e suriettiva ovvero se e solo se $\ker f = \{0_V\}$ e $\text{Im } f = W$.

Oss 2. Sia $f: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora

- se $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ è un insieme di generatori di V , $\{f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2), \dots, f(\underline{v}_n)\}$ è un insieme di generatori di $f(V)$ (proposizione 6).
- se $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ è un insieme di vettori linearmente dipendenti di V , $\{f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2), \dots, f(\underline{v}_n)\}$ è un insieme di vettori linearmente dipendenti di $f(V)$,

se esistono n scalari t_1, t_2, \dots, t_n non tutti nulli tali che $t_1 \underline{v}_1 + t_2 \underline{v}_2 + \dots + t_n \underline{v}_n = 0_V$ si ha, dalle proposizioni 2 e 3, $f(t_1 \underline{v}_1 + t_2 \underline{v}_2 + \dots + t_n \underline{v}_n) = t_1 f(\underline{v}_1) + t_2 f(\underline{v}_2) + \dots + t_n f(\underline{v}_n) = f(0_V) = 0_W$.

- se $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ è una base di V , $\{f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2), \dots, f(\underline{v}_n)\}$ è un insieme di generatori di $f(V)$, non necessariamente una base.

Basta considerare l'applicazione $f: K^3 \rightarrow K^2$ definita da $f \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. La base canonica

$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ di K^3 ha come immagini $f(\underline{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $f(\underline{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $f(\underline{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ che

non è una base di K^2 .

- se f è un'applicazione *iniettiva* e $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti di V , $\{f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2), \dots, f(\underline{v}_n)\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti di $f(V)$.

Sia infatti $t_1 f(\underline{v}_1) + t_2 f(\underline{v}_2) + \dots + t_n f(\underline{v}_n) = 0_W$ con $t_1, t_2, \dots, t_n \in K$. Allora $t_1 f(\underline{v}_1) + t_2 f(\underline{v}_2) + \dots + t_n f(\underline{v}_n) = f(t_1 \underline{v}_1 + t_2 \underline{v}_2 + \dots + t_n \underline{v}_n) = 0_W$. Quindi $t_1 \underline{v}_1 + t_2 \underline{v}_2 + \dots + t_n \underline{v}_n \in \ker f$ ed essendo $\ker f = \{0_V\}$ per il corollario 1, si ottiene $(t_1 \underline{v}_1 + t_2 \underline{v}_2 + \dots + t_n \underline{v}_n) = 0_V$ e quindi poiché per ipotesi $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti si ha $t_1 = t_2 = \dots = t_n = 0$. Pertanto ogni combinazione lineare di $\{f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2), \dots, f(\underline{v}_n)\}$ è uguale a 0_W se e solo se i coefficienti della

combinazione sono tutti nulli e $\{f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2), \dots, f(\underline{v}_n)\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti.

- v. se f è un'applicazione biunivoca e $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ è una base di V , $\{f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2), \dots, f(\underline{v}_n)\}$ è una base di W .

Segue da i. e da iv. tenendo conto che essendo f suriettiva $f(V)=W$.

Def. 7. Siano $f: V \rightarrow W$ e $g: V \rightarrow W$ due applicazioni lineari. L'applicazione $f+g: V \rightarrow W$ definita da $(f+g)(\underline{v})=f(\underline{v})+g(\underline{v})$, per ogni $\underline{v} \in W$, è un'applicazione lineare di V in W . Analogamente, per ogni scalare t , l'applicazione $tf: V \rightarrow W$ definita come $(tf)(\underline{v})=t(f(\underline{v}))$ è un'applicazione lineare di V in W . Quindi l'insieme delle applicazioni lineari di V in W forma uno spazio vettoriale sul campo K rispetto alle operazioni sopra definite. Tale spazio viene indicato di solito con la notazione $\text{Hom}_K(V, W)$ o semplicemente $\text{Hom}(V, W)$.

Def. 8. Siano $f: V \rightarrow W$ e $g: W \rightarrow Z$ due applicazioni. Si chiama *prodotto* (o funzione composta) di tali applicazioni la funzione $g \circ f: V \rightarrow Z$ definita da $g \circ f(\underline{v})=g(f(\underline{v}))$ per ogni $\underline{v} \in V$.

Proposizione 7. Siano $f: V \rightarrow W$ e $g: W \rightarrow Z$ due applicazioni lineari, allora il prodotto $g \circ f: V \rightarrow Z$ definita in Def.8 è una applicazione lineare di V in Z .

Dim. Si ha per ogni $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ in V e t_1, t_2 in K si ha : $g \circ f(t_1 \underline{v}_1 + t_2 \underline{v}_2) = g(f(t_1 \underline{v}_1 + t_2 \underline{v}_2)) = g(t_1 f(\underline{v}_1) + t_2 f(\underline{v}_2))$ perché f è lineare e per la linearità di g si ha $g(t_1 f(\underline{v}_1) + t_2 f(\underline{v}_2)) = t_1 g(f(\underline{v}_1)) + t_2 g(f(\underline{v}_2)) = t_1 (g \circ f(\underline{v}_1)) + t_2 (g \circ f(\underline{v}_2))$. Quindi si ha $g \circ f(t_1 \underline{v}_1 + t_2 \underline{v}_2) = t_1 (g \circ f(\underline{v}_1)) + t_2 (g \circ f(\underline{v}_2))$ e per la Proposizione 1 $g \circ f$ è lineare.

Def. 8. Per ogni spazio vettoriale V , si chiama *applicazione identità* di V l'applicazione $I_V: V \rightarrow V$ definita da $I_V(\underline{v})=\underline{v}$, per ogni $\underline{v} \in V$.

Oss.3. I_V è un'applicazione lineare. Inoltre per ogni applicazione $f: V \rightarrow W$ si ha $I_W \circ f = f \circ I_V = f$.

Ricordiamo dal corso d'analisi che una funzione $f: V \rightarrow W$ si dice *invertibile* se esiste una funzione $g: W \rightarrow V$ tale che $I_V = g \circ f$ e $I_W = f \circ g$. La funzione g , se esiste, si chiama *funzione inversa* di f e si denota con f^{-1} .

Si può provare che la funzione inversa di f , f^{-1} , esiste se e solo se f è biunivoca e, in tal caso, è definita da $f^{-1}(\underline{w})=\underline{v}$ se $f(\underline{v})=\underline{w}$ (notate che per ogni $\underline{w} \in W$ un tale $\underline{v} \in V$ esiste perché f è suriettiva ed è unico perché f è iniettiva).

Proposizione 8. Sia $f: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare biunivoca, allora $f^{-1}: W \rightarrow V$ (che esiste) è un'applicazione lineare.

Consideriamo ora il caso $V=W$. Le applicazioni lineari da V in V si chiamano *endomorfismi* di V e l'insieme $\text{Hom}_K(V; V)$ di tutte le applicazioni lineari da V in V viene anche denotato con $\text{End}_K(V)$. In $\text{End}_K(V)$ possiamo definire le potenze ad esponente non negativo di una applicazione lineare $f: V \rightarrow V$, ponendo $f^0 = I_V$ e, per ogni $n > 0$, $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ (n volte).

Def. 9: Un'applicazione lineare $f: V \rightarrow W$ che sia suriettiva ed iniettiva (biunivoca) si dice *isomorfismo* di V in W . In tal caso si dice anche che i due spazi V e W sono *isomorfi*.

E' immediato osservare che il prodotto di due isomorfismi è un isomorfismo e che la funzione inversa di un isomorfismo è un isomorfismo.

Oss.4. L'applicazione l_B dell'esempio 2 che associa ad ogni vettore \underline{v} di uno spazio vettoriale V di dimensione n il vettore colonna \underline{v}_B delle sue n componenti rispetto alla base B è un isomorfismo di V in K^n .

Proposizione 9. Due spazi vettoriali di dimensione finita sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

Dim. Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita n , allora per l'osservazione 4, dette B e C due basi di V e W rispettivamente, $l_B: V \rightarrow K^n$, $l_C: W \rightarrow K^n$ sono isomorfismi ed anche l'applicazione τ cambiamento di base dalla base C alla base B di K^n è un isomorfismo e dunque l'applicazione inversa $l_C^{-1}: K^n \rightarrow W$ è un isomorfismo e $l_C^{-1} \circ \tau \circ l_B: V \rightarrow W$ è un isomorfismo.

Viceversa sia $f: V \rightarrow W$ un isomorfismo allora per v. dell'osservazione 2 le immagini dei vettori di una base di V sono una base di W e pertanto $\dim V = \dim W$.

Consideriamo ora le *applicazioni lineari di K^n in K^m* (riferiti alle basi canoniche) *associate ad una matrice* A di tipo (m,n) ad elementi nel campo K , ovvero le trasformazioni f_A della forma $f_A(\underline{v}) = A\underline{v}$

per ogni $\underline{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in K^n$.

- f_A è un'applicazione lineare. Inoltre $\ker f_A = \ker A$, infatti $f_A(\underline{v}) = \underline{0}_{K^m}$ se e solo se $A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underline{0}_{m \times 1}$.

Dunque $\dim \ker f_A = n - \text{rk}(A)$, perciò f_A è iniettiva se e solo se $\text{rk}(A) = n$.

- $\text{Im } f_A = \text{Col}(A)$, spazio vettoriale generato dalle colonne di A . Infatti, un vettore $\underline{w} \in K^m$

appartiene ad $\text{Im } f_A = f_A(K^n)$ se e solo se si ha $\underline{w} = A\underline{v}$ per qualche $\underline{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$, dunque se e solo se \underline{w}

è combinazione lineare delle colonne di A . Ne segue che $\dim \text{Im } f_A = \text{rk}(A)$, perciò f_A è suriettiva se e solo se $\text{rk}(A) = m$.

- f_A è biunivoca se e solo se A è una matrice quadrata di rango massimo, quindi con $\det A \neq 0$, quindi invertibile, etc.
- Per ogni h con $1 \leq h \leq m$, la h -esima colonna di A è l'immagine mediante f_A di \underline{e}_h (h -esimo vettore della base canonica di K^n).
- Se $f_A: K^n \rightarrow K^m$ e $f_B: K^n \rightarrow K^m$ sono applicazioni lineari associate rispettivamente alle matrici A e B di tipo (m,n) , l'applicazione somma $f_A + f_B: K^n \rightarrow K^m$ è associata alla matrice $A+B$. Infatti $(f_A + f_B)(\underline{v}) = f_A(\underline{v}) + f_B(\underline{v}) = A\underline{v} + B\underline{v} = (A+B)\underline{v}$.

- Se $f_A: K^n \rightarrow K^m$ e $f_B: K^m \rightarrow K^r$ sono applicazioni lineari associate rispettivamente alla matrice A di tipo (m,n) e alla matrice B di tipo (r,m) , l'applicazione prodotto $f_B \circ f_A: K^n \rightarrow K^r$ è associata alla matrice BA . Infatti $f_B \circ f_A(\underline{v}) = f_B(f_A(\underline{v})) = f_B(A\underline{v}) = B(A\underline{v}) = (BA)\underline{v}$.
- Per ogni coppia di matrici A, B di tipo rispettivamente (m,n) ed (n,r) , si ha $\text{rk}(BA) \leq \min(\text{rk}(A), \text{rk}(B))$. Infatti, si considerino le applicazioni $f_A: K^n \rightarrow K^m$, $f_B: K^m \rightarrow K^r$ e $f_B \circ f_A: K^n \rightarrow K^r$. Si ha $\dim \text{Im } f_B \circ f_A = \text{rk}(BA) \leq \dim \text{Im } f_B$ perché $\text{Im } f_B \circ f_A = f_B(f_A(K^n))$ è un sottospazio di $f_B(K^m) = \text{Im } f_B$; quindi $\text{rk}(BA) \leq \text{rk}(B)$. Ma si ha anche $\dim \text{Im } f_B \circ f_A \leq \dim \text{Im } f_A$ perché $\dim f_B(f_A(K^n)) \leq \dim f_A(K^n)$ per la Proposizione 6, dunque $\text{rk}(BA) \leq \text{rk}(A)$.

Ci occupiamo ora delle *applicazioni lineari* $f: V \rightarrow W$ sotto l'ipotesi che V abbia dimensione finita n .

Teorema 1: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n\}$ una sua base. Siano $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_n$ vettori (arbitrariamente scelti) in uno spazio vettoriale W . Allora esiste una ed una sola applicazione lineare $f: V \rightarrow W$ tale che per ogni i con $1 \leq i \leq n$ si abbia $f(\underline{b}_i) = \underline{w}_i$. L'applicazione f è definita dalla formula $f(x_1 \underline{b}_1 + x_2 \underline{b}_2 + \dots + x_n \underline{b}_n) = x_1 \underline{w}_1 + x_2 \underline{w}_2 + \dots + x_n \underline{w}_n$.

Dim. Per prima cosa verifichiamo che la $f: V \rightarrow W$, definita da $f(x_1 \underline{b}_1 + x_2 \underline{b}_2 + \dots + x_n \underline{b}_n) = x_1 \underline{w}_1 + x_2 \underline{w}_2 + \dots + x_n \underline{w}_n$, è un'applicazione lineare. Osserviamo subito che f è ben definita perché ogni vettore $\underline{v} \in V$ si scrive in uno e un sol modo come combinazione lineare dei vettori della base B e quindi ha una ed una sola immagine mediante la f . Siano poi $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ e $t_1, t_2 \in K$. Siano $\underline{v}_1 = x_1 \underline{b}_1 + x_2 \underline{b}_2 + \dots + x_n \underline{b}_n$, $\underline{v}_2 = y_1 \underline{b}_1 + y_2 \underline{b}_2 + \dots + y_n \underline{b}_n$ le rappresentazioni di $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ come combinazione lineare dei vettori della base, allora $t_1 \underline{v}_1 + t_2 \underline{v}_2 = (t_1 x_1 + t_2 y_1) \underline{b}_1 + (t_1 x_2 + t_2 y_2) \underline{b}_2 + \dots + (t_1 x_n + t_2 y_n) \underline{b}_n$ e quindi $f(t_1 \underline{v}_1 + t_2 \underline{v}_2) = (t_1 x_1 + t_2 y_1) \underline{w}_1 + \dots + (t_1 x_n + t_2 y_n) \underline{w}_n = t_1(x_1 \underline{w}_1 + x_2 \underline{w}_2 + \dots + x_n \underline{w}_n) + t_2(y_1 \underline{w}_1 + y_2 \underline{w}_2 + \dots + y_n \underline{w}_n) = t_1 f(\underline{v}_1) + t_2 f(\underline{v}_2)$. Ovviamente poi $f(\underline{b}_i) = \underline{w}_i$ per ogni i con $1 \leq i \leq n$. Viceversa se f è un'applicazione lineare di V in W , per la linearità deve necessariamente essere $f(x_1 \underline{b}_1 + x_2 \underline{b}_2 + \dots + x_n \underline{b}_n) = x_1 f(\underline{b}_1) + x_2 f(\underline{b}_2) + \dots + x_n f(\underline{b}_n)$ e essendo $f(\underline{b}_i) = \underline{w}_i$ per ogni i con $1 \leq i \leq n$, si ha $f(x_1 \underline{b}_1 + x_2 \underline{b}_2 + \dots + x_n \underline{b}_n) = x_1 \underline{w}_1 + x_2 \underline{w}_2 + \dots + x_n \underline{w}_n$.

Questo teorema dice che un'applicazione lineare f da V in W , con V di dimensione finita, è completamente determinata quando si conoscano le immagini dei vettori di una base di V mediante f . Quindi, qualsiasi sia la dimensione di W , $f(V) = \text{Im } f$ è un sottospazio di W la cui dimensione è minore od uguale a quella di V (e in caso W abbia dimensione finita anche della dimensione di W), come del resto avevamo già osservato dopo la Proposizione 6.

Teorema 2 (di rappresentazione): Sia $f: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare con $\dim V = n$, $\dim W = m$ e siano B e C due basi rispettivamente di V e W . Allora esiste un'unica matrice A di tipo (m,n) a coefficienti in K tale che per ogni $\underline{v} \in V$, posto $\underline{w} = f(\underline{v})$, si abbia $\underline{w}|_C = A(\underline{v}|_B)$. Si dice che A rappresenta l'applicazione lineare f rispetto alle basi B e C . Useremo la notazione $A = M_{B,C}(f)$ per indicare la matrice che rappresenta la applicazione f quando V è riferito alla base B e W alla base C .

Dim. Sia $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n\}$. Costruiamo la matrice A mettendo nella colonna i -esima per ogni $1 \leq i \leq n$, le componenti del vettore $f(\underline{b}_i) \in W$, rispetto alla base C di W . Preso comunque un vettore \underline{v} in V , sia

$\underline{v}|_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ allora $f(\underline{v}) = f(\sum_{i=1}^n x_i \underline{b}_i) = \sum_{i=1}^n x_i f(\underline{b}_i)$. Sia $C = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_m\}$, per costruzione di A si ha

$f(\underline{b}_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} \underline{c}_j$ e dunque $f(\underline{v}) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^m a_{ji} \underline{c}_j = \sum_{j=1}^m (\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i) \underline{c}_j$ dove $\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i$ è la componente j -esima del vettore colonna $A(\underline{v}|_B)$. Quindi il vettore colonna $A(\underline{v}|_B)$ è $f(\underline{v})|_C$.

Oss.5

Nel capitoletto sugli spazi vettoriali abbiamo visto che, date due basi B e C di uno stesso spazio vettoriale V di dimensione n , la matrice S del cambiamento di base dalla base B alla base C è la matrice che ha come colonna i -esima (per ogni i con $1 \leq i \leq n$) le componenti dell' i -esimo vettore della base C rispetto alla base B , per cui $S = M_{C,B}(I_V)$, dove I_V è l'applicazione identica da V a V . Naturalmente la matrice del cambiamento di base dalla base C alla base B è $S^{-1} = M_{B,C}(I_V)$.

Dal teorema di rappresentazione ricaviamo la seguente

Proposizione 10. Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita sul campo K con $\dim V = n$ e $\dim W = m$ e siano B e C due basi rispettivamente di V e W . Allora la funzione G che associa ad ogni applicazione lineare $f: V \rightarrow W$ la matrice $M_{B,C}(f)$ è un isomorfismo dello spazio vettoriale $\text{Hom}(V, W)$ nello spazio vettoriale $M_K(n, m)$ delle matrici di tipo (n, m) ad elementi in K . Poiché matrice che rappresenta una applicazione lineare cambia al cambiare delle basi di V e W le basi vengono spesso messe in evidenza scrivendo $\text{Hom}_{B,C}(V, W)$ al posto di $\text{Hom}(V, W)$.

Proposizione 11. Siano $f: V \rightarrow W$ e $g: W \rightarrow Z$ applicazioni lineari, con V, W, Z spazi vettoriali di dimensione finita. Siano B_1, B_2, B_3 basi rispettivamente di V, W, Z , e siano $A_1 = M_{B_1, B_2}(f)$, $A_2 = M_{B_2, B_3}(g)$ le matrici che rappresentano rispettivamente f rispetto alle basi B_1, B_2 e g rispetto alle basi B_2, B_3 . Allora $A_2 A_1$ rappresenta l'applicazione $g \circ f$ rispetto alle basi B_1 e B_3 , ovvero $M_{B_1, B_3}(g \circ f) = M_{B_2, B_3}(g) M_{B_1, B_2}(f)$,

Proposizione 11. Sia $f: V \rightarrow W$ un' applicazione lineare, con V, W spazi vettoriali di dimensione finita. Siano B, B' due basi di V e C, C' due basi di W . Sia A la matrice che rappresenta f rispetto alle basi B, C e siano S e T le matrici di passaggio dalla base B alla base B' e dalla base C alla base C' rispettivamente. Allora la matrice che rappresenta f rispetto alle basi B' e C' è $T^{-1}AS$, ovvero $M_{B', C'}(f) = M_{B', B}(I_V)^{-1} M_{B, C}(f) M_{C', C}(I_W) = M_{B, B'}(I_V) M_{B, C}(f) M_{C', C}(I_W)$.

Dim. Sappiamo dal capitoletto sugli spazi vettoriali che, per ogni $\underline{v} \in V$, si ha $\underline{v}|_{B'} = S \underline{v}|_B$ e che, per ogni $\underline{w} \in W$, si ha $\underline{w}|_{C'} = T^{-1} \underline{w}|_C$. Inoltre dal teorema di rappresentazione si ha $f(\underline{v})|_C = A \underline{v}|_B$, quindi $f(\underline{v})|_{C'} = T^{-1} f(\underline{v})|_C = T^{-1} A \underline{v}|_B = T^{-1} A S \underline{v}|_{B'}$.

Def. 10: Sia $f: V \rightarrow W$ un' applicazione lineare. Si definisce *rango* di f la dimensione di $\text{Im } f = f(V)$.

Abbiamo già notato che $\dim \text{Im } f \leq \dim V$ e che $\dim \text{Im } f \leq \dim W$, quindi $\text{rk } f \leq \min(\dim V, \dim W)$.

Teorema 3 (di nullità più rango): Sia $f: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita allora $\dim(V) = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$.

Dim. Se V ha dimensione finita sappiamo che $f(V)$ ha dimensione finita (i.di Oss.2). Fissate due basi di V e $f(V)$, sia A la matrice che rappresenta f rispetto a tali basi. Allora si ha $\dim f(V) = \dim \operatorname{Col} A = \operatorname{rk}(A)$ e $\dim \ker f = \dim \ker A = n - \operatorname{rk}(A)$.

Altra dimostrazione. Se V ha dimensione finita, $\ker f$ che è un sottospazio di V ha pure dimensione finita. Sia $d = \dim \ker f$ e sia $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_d\}$ una base di $\ker f$. Poiché $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_d\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti di V , possiamo trovare $n-d$ vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{n-d} \in V$ tali che $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_d, \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{n-d}\}$ sia una base di V . Allora $\{f(\underline{u}_1) = f(\underline{u}_2) = \dots = f(\underline{u}_d) = \underline{0}_W, f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2), \dots, f(\underline{v}_{n-d})\}$ è un sistema di generatori di $f(V) = \operatorname{Im} f$ per il teorema 1. Quindi $\{f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2), \dots, f(\underline{v}_{n-d})\}$ è un sistema di generatori di $f(V) = \operatorname{Im} f$. Verifichiamo che questo è anche un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Supponiamo che sia $t_1 f(\underline{v}_1) + t_2 f(\underline{v}_2) + \dots + t_{n-d} f(\underline{v}_{n-d}) = \underline{0}_W$. Allora, essendo f un'applicazione lineare, si ha $f(t_1 \underline{v}_1 + t_2 \underline{v}_2 + \dots + t_{n-d} \underline{v}_{n-d}) = \underline{0}_W$, quindi $t_1 \underline{v}_1 + t_2 \underline{v}_2 + \dots + t_{n-d} \underline{v}_{n-d} \in \ker f$, dunque esistono $k_1, k_2, \dots, k_d \in K$ tali che $t_1 \underline{v}_1 + t_2 \underline{v}_2 + \dots + t_{n-d} \underline{v}_{n-d} = k_1 \underline{u}_1 + k_2 \underline{u}_2 + \dots + k_d \underline{u}_d$, da cui $t_1 \underline{v}_1 + t_2 \underline{v}_2 + \dots + t_{n-d} \underline{v}_{n-d} - k_1 \underline{u}_1 - k_2 \underline{u}_2 - \dots - k_d \underline{u}_d = \underline{0}_V$.

Essendo $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_d, \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{n-d}\}$ una base di V , si ottiene allora $t_1 = t_2 = \dots = t_{n-d} = (k_1 = k_2 = \dots = k_d) = 0$ e quindi $\{f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2), \dots, f(\underline{v}_{n-d})\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti e pertanto è una base per $\operatorname{Im} f$.

Si ricava quindi subito il seguente Corollario che ci era già praticamente noto

Corollario 2. Sia $f: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare fra spazi di dimensione finita. Sia $\dim V = n$ e $\dim W = m$. Allora:

- f è iniettiva se e solo se $\operatorname{rk} f = n$
- f è suriettiva se e solo se $\operatorname{rk} f = m$
- f un isomorfismo se e solo se $\operatorname{rk} f = n = m$.

Ricordiamo la seguente nomenclatura:

Un'applicazione lineare da uno spazio V nel suo campo di scalari (visto come spazio vettoriale) si dice *forma lineare*. L'insieme delle forme lineari di V è uno spazio vettoriale su K chiamato *spazio duale* di K .