NOTA BENE.
Questi appunti non sono esaustivi, non contengono tutto ciò che è stato detto a lezione/ esercitazione; costituiscono una base minima di conoscenze necessarie a superare l'esame o uno strumento per un ripasso veloce. Contengono però le dimostrazioni che potrebbero essere richieste all'orale.

SISTEMI LINEARI (Capitolo 2 dello Schlesinger e/o Capitolo 4 del Bernardi-Gimigliano)

Def 1. Si dice *equazione lineare* a coefficienti in un campo K nelle n variabili $x_1, x_2,\ldots, x_n$ una equazione del tipo

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b$$

con $a_1,a_2,\ldots a_n,b \in K$. Una *soluzione* (NON n soluzioni!!) dell'equazione è una n-upla $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ di elementi di K tale che $a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\ldots+a_n\alpha_n=b$.

Esempio 1. Una soluzione dell'equazione 3x+2y=7 a coefficienti nel campo R dei numeri reali è la coppia (1,2), infatti $3\cdot1+2\cdot2=7$; ovviamente l'equazione data ammette infinite soluzioni del tipo $(\alpha, \frac{7-3\alpha}{2})$ con $\alpha\in R$.

Def 2. Si dice *sistema lineare di* m *equazioni in* n *incognite* a coefficienti in K un sistema del tipo

$$(1)\quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

Ovvero un insieme di m equazioni lineari nelle stesse n variabili. Si dice *soluzione del sistema lineare* una n-upla di elementi di K che sia soluzione di tutte le equazioni del sistema, ammesso che tale n-upla esista.

Un sistema lineare può essere sempre rappresentato (vedi algebra delle matrici) con un'equazione matriciale del tipo

$$(2)\qquad A\underline{x}=\underline{b},$$

ove A è la matrice di tipo (m,n) la cui riga i-esima è formata dai coefficienti delle incognite nella i-esima equazione del sistema:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

e viene detta *matrice dei coefficienti*, $\underline{x}$ e $\underline{b}$ sono vettori colonna rispettivamente di tipo (n,1) ed (m,1) della forma:

$$\underline{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \underline{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

detti rispettivamente *vettore (o matrice) delle incognite* e *dei termini noti*. La matrice C=[A|$\underline{b}$] di tipo (m,n+1) ottenuta accostando alle colonne di A la colonna $\underline{b}$ si chiama *matrice completa* .
Le soluzioni del sistema (1) sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione matriciale (2).

<u>Esempio 2</u>
Il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x - 2y = 1 \\ 5x + 2y = 3 \end{cases}$$

ha la seguente rappresentazione sotto forma di equazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

<u>Def 3</u>. Un sistema lineare è *impossibile* se non ammette soluzioni, altrimenti è possibile: un sistema possibile è detto *determinato* se ammette una ed una sola soluzione (che è una n-upla di elementi di K!) altrimenti è detto *indeterminato*.

<u>Esempio 3</u>

Il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

è possibile e determinato, ammette l'unica soluzione x=1/5, y=-2/5.

Il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 3 \end{cases}$$

è impossibile, infatti ogni soluzione della prima equazione sostituita nel primo membro della seconda darebbe 2.

Il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$$

è possibile ed ammette infinite soluzione del tipo x=α, y=1-2 α, con α parametro arbitrario, quindi è indeterminato.

<u>Def 4</u>. Un sistema lineare è *omogeneo* se $\underline{b}=\underline{0}_{m\times1}$. Un sistema omogeneo è *sempre possibile* in quanto ammette sempre come soluzione $\underline{x}=\underline{0}_{n\times1}$. Tale soluzione è detta *soluzione banale* del sistema omogeneo. Quando consideriamo sistemi omogenei siamo interessati quindi a trovare soluzioni non banali, dette anche *autosoluzioni*, del sistema.
L'insieme di tutte e sole le soluzioni del sistema omogeneo A$\underline{x}$=$\underline{0}$ vengono chiamate anche *ker* A.

<u>Osservazione 1</u>. Va subito osservato che se $\underline{x}_0$ è una soluzione del sistema lineare $A\underline{x}=\underline{b}$, tutte e sole le altre soluzioni del sistema sono della forma $\underline{x}_0+\underline{k}$, dove $\underline{k}$ è un elemento di *ker* A. Infatti se $\underline{x}_0$ è una soluzione del sistema $A\underline{x}=\underline{b}$, abbiamo $A\underline{x}_0=\underline{b}$, se $\underline{k}$ è un elemento di *ker* A abbiamo $A\underline{k}=\underline{0}$ e dunque $A(\underline{x}_0+\underline{k})= A\underline{x}_0+A\underline{k} =\underline{b}+\underline{0}= \underline{b}$, pertanto $\underline{x}_0+\underline{k}$ è una soluzione del sistema $A\underline{x}=\underline{b}$. Viceversa se $\underline{x}_0$ e $\underline{x}_1$ sono entrambe soluzioni del sistema $A\underline{x}=\underline{b}$, abbiamo $A\,\underline{x}_1= A\,\underline{x}_0=\underline{b}$, e quindi $A(\underline{x}_1-\underline{x}_0)=\underline{0}$ e pertanto $\underline{x}_1-\underline{x}_0=\underline{k} \in$ *ker* A.

E' anche utile, per altri contesti, osservare che il sistema lineare (1) può essere scritto nella forma $x_1\underline{c}_1+x_2\underline{c}_2+\ldots+x_n\underline{c}_n=\underline{b}$, dove, per ogni i, $\underline{c}_i$ è la i-esima colonna della matrice dei coefficienti A e $\underline{b}$ è il vettore dei termini noti. Questo dice che un sistema è possibile se e solo se $\underline{b}$ appartiene allo spazio vettoriale generato dai vettori colonna di A e che un sistema omogeneo ammette autosoluzioni se e solo se i vettori colonna di A sono un insieme di vettori linearmente dipendenti.

<u>Def. 5</u>. Due sistemi lineari in n incognite si dicono *equivalenti* se ogni soluzione del primo è soluzione del secondo e viceversa.

<u>Osservazione 2</u>. Si può subito osservare che

- se un sistema S' è ottenuto da un sistema S scambiando di posto due equazioni, S ed S' sono equivalenti;
- se un sistema S' è ottenuto da un sistema S aggiungendo membro a membro all'i-esima equazione la j-esima equazione moltiplicata per uno scalare k, S ed S' sono equivalenti.

Siano $A\underline{x}=\underline{b}$ ed $A'\underline{x}=\underline{b}'$ le rappresentazioni matriciali dei due sistemi S ed S', nel primo caso la matrice completa $[A'|\underline{b}']$ si ottiene da $[A|\underline{b}]$ scambiando le righe corrispondenti a coefficienti e termine noto delle due equazioni scambiate di posto, nel secondo caso la matrice completa $[A'|\underline{b}']$ si ottiene aggiungendo alla i-esima riga di $[A|\underline{b}]$ la j-esima moltiplicata per k; viceversa se scambiamo due righe della matrice completa di un sistema S si ottiene la matrice completa di un sistema S' in cui si sono scambiate di posto due equazioni, se aggiungiamo alla riga i-esima della matrice completa di un sistema S la j-esima riga moltiplicata per uno scalare k si ottiene la matrice completa di un sistema S' in cui si è aggiunta (membro a membro) alla i-esima equazione la j-esima moltiplicata per k.

<u>Def 6</u>. Chiamiamo *mosse di Gauss* od *operazioni elementare* su una matrice C le seguenti operazioni:

1. scambiare due righe di C
2. aggiungere alla i-esima riga di C la sua j-esima riga moltiplicata per k.

<u>Def 7</u>. Si dice che una matrice di tipo (m,n) è in forma *a scala* quando sono soddisfatte le seguenti condizioni

- se per qualche i, $1\le i<n$, la riga i-esima è fatta tutta di 0, allora ogni riga i+h-esima, $0\le h\le n-i$, è fatta tutta di 0
- se la riga k-esima è l'ultima riga non nulla e per ogni t, $1\le t\le k$, j_t rappresenta l'indice di colonna del primo elemento non nullo della riga t-esima, $j_1<j_2<\ldots<j_t$.

Gli elementi di posti (t,j_t), $1\le t\le k$, si chiamano *pivot* della matrice.

<u>Esempio 4</u>.

La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ è una matrice a scala,

le matrici $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ non sono a scala.

Teorema 1: *Ogni matrice C di tipo* (m,n) *può essere ridotta a scala applicando una sequenza di mosse di Gauss.*

Dim. Se C è la matrice nulla, C è banalmente a scala. Analogamente se C ha una sola riga è banalmente a scala. Sia allora C una matrice non nulla con almeno due righe.

1. Supponiamo che j sia la prima colonna non nulla di C, e sia h la prima riga tale che $c_{hj}\neq 0$ e poniamo $p_1=c_{hj}$. Scambiando la prima riga con la h-esima riga di A (mossa di Gauss) si trova una matrice in cui nel posto (j,1) c'è l'elemento $p_1\neq 0$, eliminiamo ora tutti gli elementi diversi da 0 della colonna j-esima aggiungendo per ogni r, $2\leq r\leq m$, alla riga r-esima della matrice la prima riga moltiplicata per $-\frac{c_{rj}}{p_1}$. Si arriva così (con un numero finito di mosse di Gauss) ad una matrice C' in cui le prime j-1 colonne sono tutte di 0, la colonna j-esima ha solo il primo elemento (p_1) diverso da 0.
2. Sia C_1 la sottomatrice di C' formata dalle ultime m-1 righe e n-j colonne di C'. Se C_1 è a scala allora anche C' è a scala, altrimenti si riapplica il procedimento 1 alla matrice C_1 che ha dimensioni (m-1, n-j).
3. Con un numero finito di passi si ottiene quindi una matrice a scala.

Osservate che abbiamo dato una versione semplificata dell'algoritmo di riduzione a scala, perché abbiamo previlegiato l'uso della prima riga in cui l'elemento sulla prima colonna non nulla è diverso da 0 ed in genere invece si operano scelte più raffinate che facilitano i conti.

Def 8. Si dice *rango* di una matrice C, rk(C), il numero delle righe non nulle (e quindi dei pivot) della matrice a scalino ottenuta da C con l'algoritmo descritto nel Teorema 1.

Osservazione 3. Sia C una matrice di tipo (m,n), si ha

1. rk(C)=0 se e solo se C è la matrice nulla di tipo (m,n)
2. $rk(C)\leq \min(m,n)$
3. rk(C)=rk(U) dove U è la matrice a scalino ottenuta da C con l'algoritmo del teorema 1.

Consideriamo ora il sistema lineare di m equazioni in n incognite $A\underline{x}=\underline{b}$. La matrice completa del sistema $C=[A|\underline{b}]$ si può portare con l'algoritmo descritto nel Teorema 1 in forma a scala e quindi il sistema si può portare in una forma equivalente $U\underline{x}=\underline{b}'$ dove $[U|\underline{b}']$ è la forma a scala di C e U è quindi la forma a scala di A. Ovviamente si ha

- $r=rk(U)\leq \min(m,n)\leq n$,
- $r\leq rk([U|\underline{b}'])\leq r+1$.

1. Se $rk([U|\underline{b}'])=r+1$, il sistema $U\underline{x}=\underline{b}'$ ha r+1 equazioni di cui l'ultima ha la forma $0=p_{r+1}$, dove p_{r+1} è l' (r+1)-esimo pivot di $[U|\underline{b}']$, e quindi il sistema $U\underline{x}=\underline{b}'$ è impossibile e pertanto è impossibile anche il sistema equivalente $A\underline{x}=\underline{b}$.

2. Supponiamo allora che sia $rk([U|\underline{b}'])=rk(U)=r$.
   1. Se r=n il sistema $U\underline{x}=\underline{b}'$ ha la forma

$$\begin{cases} p_1x_1+u_{12}x_2+\ldots+u_{1n}x_n=b'_1 \\ 0x_1+p_2x_2+\ldots+u_{2n}x_n=b'_2 \\ \vdots \\ 0x_1+0x_2+\ldots+p_nx_n=b'_n \end{cases}$$

e quindi ha una ed una soluzione che si trova facilmente risolvendo le equazioni dall'ultima alla prima e quindi anche il sistema equivalente A$\underline{x}$=$\underline{b}$ ha quell'unica soluzione.

- Se r<n il sistema U$\underline{x}$=$\underline{b}$' ha la forma

$$\begin{cases} 0x_1 + \ldots + 0x_{j-1} + p_1 x_j + u_{1\,j+1} x_{j+1} + \ldots + u_{1n} x_n = b'_1 \\ 0x_1 + \ldots + 0x_{j-1} + \ldots + 0x_{h-1} + p_2 x_h + \ldots + u_{2n} x_n = b'_2 \\ \vdots \\ 0x_1 + \ldots + 0x_{j-1} + \ldots + 0x_{h-1} + \ldots + 0x_{r-1} + p_r x_s \ldots + u_{rn} x_n = b'_r \end{cases}$$

con j<h<....<s.

Teniamo nella parte sinistra del sistema i monomi che contengono le variabili che corrispondono alle r colonne dei pivot e portiamo nella parte destra gli altri, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} p_1 x_j + u_{1t} x_t + \ldots + u_{1s} x_s = b'_1 - u_{1\,j+1} x_{j+1} - \ldots - u_{1\,h-1} x_{h-1} - u_{1\,h+1} x_{h+1} - \ldots - u_{1n} x_n \\ p_2 x_h + \ldots + u_{2s} x_s = b'_2 - u_{2\,h+1} x_{t+1} - \ldots - u_{2\,s-1} x_{s-1} - u_{2\,s+1} x_{s+1} - \ldots - u_{2n} x_n \\ \vdots \\ p_r x_s = b'_r - u_{r\,s+1} x_{s+1} - \ldots - u_{rn} x_n \end{cases}$$

Le n-r variabili, $x_1,\ldots,x_{j-1}$, $x_{j+1},\ldots$, x_{h-1} , x_{h+1} ,..., x_{s-1}, x_{s+1} ,..., x_n si chiamano *variabili libere* e possono assumere valori arbitrari $t_1,\ldots,t_{n-r}$, le altre si ricavano in funzione di tali parametri ricavando dall'ultima equazione x_s, e procedendo poi all'indietro per ricavare le altre.

Osserviamo che se vogliamo scrivere le soluzioni in forma matriciale, possiamo chiamare $\underline{v}_0$ la soluzione che si ottiene ponendo $t_1=\ldots=t_{n-r}=0$ (nel caso di un sistema omogeneo si avrebbe $\underline{v}_0=\underline{0}_{n\times1}$), $\underline{w}_i$ la soluzione che si ottiene ponendo $t_i=1$, $t_0=\ldots=t_{i-1}=t_{i+1}=\ldots=t_{n-r}=0$ e $\underline{v}_i=\underline{w}_i-\underline{v}_0$, con tale notazione la generica soluzione del sistema è

$$\underline{x}=\underline{v}_0+t_1\underline{v}_1+\ldots t_{n-r}\underline{v}_{n-r}.$$

Si è quindi provato il teorema di Rouché Capelli:
Un sistema lineare di m *equazioni in* n *incognite è possibile se e solo se il rango* r *della sua matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa.*
Se r=n *il sistema è anche determinato, se* r<n *il sistema ammette infinite soluzioni che dipendono da* n-r *parametri arbitrari (in breve* ∞^{n-r} *soluzioni).*

Come corollari si ottengono:

Regola di Cramer: *Un sistema lineare* A$\underline{x}$=$\underline{b}$ *con* n *equazioni in* n *incognite* (A *è una matrice quadrata) con* rk(A)=n *ha sempre una e una sola soluzione.*
La matrice completa infatti deve avere rango n. La forma della soluzione è specificata nel capitolo sul determinante di una matrice quadrata.

Corollario 1: *Un sistema lineare omogeneo* A$\underline{x}$=$\underline{0}$ *con* m *equazioni in* n *incognite ammette autosoluzioni se e sono se* rk(A)<n. *In tal caso ha* ∞^{n-r} *soluzioni la cui forma è* $\underline{x}=t_1\underline{v}_1+\ldots t_{n-r}\underline{v}_{n-r}$ *dove i coefficienti* t_i *assumono valori arbitrari.*

Osservazione 4. Potrebbe sembrare strano che il numero di equazioni del sistema non intervenga nel teorema di Rouché Capelli, ma va notato che se la matrice dei coefficienti e quella completa si trasformano in matrici a scala con r righe non nulle, questo significa che le altre righe delle matrici

A e [A|b] sono combinazioni lineari delle precedenti e quindi corrispondono ad equazioni automaticamente soddisfatte da ogni soluzione del sistema formato dalle equazioni corrispondenti alle righe non nulle della matrice a scala.

Interpretazione geometrica per i sistemi lineari con al più 3 incognite.

- Caso n=2

  Sia S un sistema lineare di m equazioni in 2 incognite di forma A$\underline{x}$=$\underline{b}$, con A matrice non nulla. Si ha allora 1≤ rk(A)≤2, 1≤ rk([A|$\underline{b}$])≤3 e rk([A|$\underline{b}$])≤rk(A)+1. Inoltre ogni equazione lineare in due variabili può essere interpretata nel piano come l'equazione di una retta e nello spazio come l'equazione di un piano parallelo all'asse z.

  - Supponiamo di lavorare nel piano.
    - Se rk(A)=rk([A|$\underline{b}$])=2, il sistema è determinato ed ha almeno due equazioni: tutte le equazioni rappresentano rette appartenenti a un fascio di rette con sostegno P, ove P è il punto le cui coordinate sono la soluzione del sistema.
    - Se rk(A)=rk([A|$\underline{b}$])=1, il sistema è possibile ma indeterminato: tutte le equazioni sono equazioni di una stessa retta r e le ∞^1 soluzioni del sistema sono le equazioni parametriche di r.
    - Se rk([A|b])=3 e rk(A)=2, il sistema è impossibile ed ha almeno tre equazioni: due equazioni rappresentano due rette non parallele che si incontrano in un punto P ed una almeno delle altre equazioni rappresenta una retta che non appartiene al fascio di sostegno P.
    - Se rk([A|$\underline{b}$])=2 e rk(A)=1, il sistema è impossibile ed ha almeno due equazioni: le equazioni rappresentano rette fra loro parallele di cui due almeno non coincidenti.
  - Supponiamo ora di lavorare nello spazio. Come già detto ogni equazione di S può essere pensata come l'equazione di un piano parallelo all'asse z.
    - Se rk(A)=rk([A|$\underline{b}$])=2, il sistema è determinato ed ha almeno due equazioni: tutte le equazioni rappresentano piani appartenenti ad uno stesso fascio con sostegno la retta r di equazioni $x=x_0, y=y_0$ (retta parallela all'asse z) ove la coppia (x_0,y_0) è la soluzione del sistema S ((x_0,y_0) sono le coordinate del punto di intersezione fra la retta r ed il piano z=0).
    - Se rk(A)=rk([A|$\underline{b}$])=1, il sistema è possibile ma indeterminato: tutte le equazioni rappresentano uno stesso piano π parallelo all'asse z (le ∞^1 soluzioni del sistema sono le equazioni parametriche della retta intersezione di π col piano z=0).
    - Se rk([A|$\underline{b}$])=3 e rk(A)=2, il sistema è impossibile ed ha almeno tre equazioni: due equazioni rappresentano piani non paralleli che si intersecano lungo una retta r (che è parallela all'asse z) ed almeno una delle restanti equazioni rappresenta un piano non appartenente al fascio di sostegno r.
    - Se rk([A|$\underline{b}$])=2 e rk(A)=1, il sistema è impossibile ed ha almeno due equazioni: le equazioni rappresentano piani fra loro paralleli e non tutti coincidenti.

- Caso n=3

  Sia S un sistema lineare di n equazioni in 3 incognite di forma A$\underline{x}$=$\underline{b}$, con A matrice non nulla. Si ha allora 1≤ rk(A)≤3, 1≤ rk([A|$\underline{b}$])≤4 e rk([A|$\underline{b}$])≤rk(A)+1. Inoltre ogni equazione di S può essere pensata come l'equazione di un piano nello spazio

    - Se rk(A)=rk([A|$\underline{b}$])=3, S è un sistema possibile e determinato con almeno 3 equazioni: le equazioni rappresentano piani che hanno uno e un solo punto comune le cui coordinate sono la soluzione del sistema.(cioè i piani appartengono ad una stessa stella di piani il cui centro ha coordinate date dalla soluzione del sistema e almeno tre piani non sono a due a due coincidenti).

- Se rk(A)= rk([A|b])=2, S è un sistema con almeno 2 equazioni, possibile ma indeterminato le cui soluzioni dipendono da un parametro t: le equazioni rappresentano piani che appartengono ad uno stesso fascio la cui retta sostegno ha equazioni parametriche date dalle ∞^1 soluzioni del sistema S.
- Se rk(A)= rk([A|b])=1, S è un sistema possibile ma indeterminato le cui soluzioni dipendono da 2 parametri: le equazioni rappresentano uno stesso piano π, le ∞^2 soluzioni del sistema sono le equazioni parametriche di π.
- Se rk([A|b])=4 e rk(A)=3, S è un sistema impossibile con almeno 4 equazioni: tre equazioni sono equazioni di piani appartenenti ad una stessa stella e c'è almeno un'equazione che rappresenta un piano non appartenente alla stella.
- Se rk([A|b])=3 e rk(A)=2, S è un sistema impossibile con almeno 3 equazioni: due equazioni sono equazioni di piani non paralleli che quindi individuano una retta r e le restanti equazioni rappresentano piani paralleli alla retta r (ed uno almeno non contiene r).
- Se rk([A|b])=2 e rk(A)=1, S è un sistema impossibile con almeno 2 equazioni: le equazioni rappresentano piani fra loro paralleli di cui due almeno distinti.