Condizioni che determinano una conica

- L'equazione generale di una conica contiene 6 coefficienti non essenziali, infatti la conica è completamente determinata quando si conoscano 5 di essi in funzione del restante. Per determinare una conica servono quindi 5 condizioni lineari (ovvero cinque condizioni che analiticamente si traducano in equazioni lineari omogenee nei coefficienti) indipendenti, in modo da avere un sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 6 incognite con matrice dei coefficienti di rango 5 da cui ricavare i coefficienti.
- Esempi di condizioni lineari sono:
  - il passaggio per un punto (1 condizione lineare)
  - Il passaggio per un punto e la retta tangente in tale punto (2 condizioni lineari)
  - chiedere che la conica sia una iperbole equilatera (1 condizione lineare)
  - chiedere che la conica sia una circonferenza (2 condizioni lineari
  - etc…

Caso particolare: condizioni che determinano una circonferenza

- Per imporre che una conica sia una circonferenza poniamo le due condizioni lineari $a_{11}=a_{22}$ e $a_{12}=0$, servono perciò per determinare una circonferenza altre tre condizioni lineari.
- Poiché possiamo sempre assumere che in una circonferenza sia $a_{11}=a_{22}=1$, nell'equazione di una circonferenza abbiamo solo 3 coefficienti essenziali e quindi dobbiamo imporre tre condizioni lineari indipendenti, che diano luogo a un sistema lineare non omogeneo di 3 equazioni in 3 incognite con matrice dei coefficienti di rango 3, da cui ricavare i coefficienti.
  - Le coordinate del centro sono due condizioni lineari
  - L'appartenenza del centro a una retta è una condizione lineare

Fasci di coniche

- Siano $f_1(x,y)=0$, $f_2(x,y)=0$ le equazioni di due coniche, ovvero due polinomi di secondo grado nelle variabili x,y. Si dice *fascio di coniche* (individuato dalle due coniche) l'insieme di tutte e sole le coniche le cui equazioni hanno la forma $\lambda f_1(x,y)+\mu f_2(x,y)=0$ con λ e μ parametri reali non entrambi nulli.
- Le due coniche che individuano il fascio hanno quattro punti in comune (eventualmente a coordinate complesse e/o in parte coincidenti) . Tutte e sole le coniche del fascio passano per tali punti, detti *punti base* del fascio.
- Un fascio di coniche
  - o è formato solo da coniche degeneri o contiene al più 3 coniche degeneri (a seconda che $I_3=0$ sia un'identità o un'equazione di 3°grado in λ,μ),
  - o è formato da sole parabole o contiene al più due parabole, eventualmente degeneri e spezzate in rette parallele (a seconda che $I_2=0$ sia un'identità o un'equazione di 2°grado in λ,μ),
  - o è formato da sole iperboli equilatere o contiene al più una iperbole equilatera, eventualmente spezzata in due rette ortogonali (a seconda che $I_1=0$ sia un'identità o un'equazione di 1°grado in λ,μ).

Caso particolare: fasci di circonferenze

- Siano $x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0$, $x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2=0$ le equazioni di due circonferenze. Si dice *fascio di circonferenze* individuato dalle due circonferenze date l'insieme di tutte e sole le circonferenze le cui equazioni hanno la forma $\lambda(x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1)+\mu(x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2)=0$ con λ e μ parametri reali non entrambi nulli.
- Per $\lambda=-\mu$ si trova l'equazione $(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+c_1-c_2=0$ che rappresenta una retta (considerata come circonferenza di raggio infinito) detta *asse radicale* del fascio.
- Le due circonferenze sostegno del fascio hanno in comune o due punti reali distinti, o due punti reali coincidenti (e quindi in tale punto sono tangenti ad una stessa retta che è l'asse radicale) o due punti a coordinate immaginarie. Tutte e solo le circonferenze del fascio passano per tali punti detti *punti base* del fascio.
- Il luogo dei centri delle circonferenze di uno stesso fascio è una retta, detta *asse centrale.* Tale retta è perpendicolare all'asse radicale ed è l'asse del segmento che ha per estremi i punti base del fascio.

Come determinare l'equazione di una conica quando….

- Si conoscano 5 suoi punti A,B,C,D,E (ovviamente a 3 a 3 non allineati):
  - si scrive il fascio di coniche per A,B,C,D, facendo le combinazione lineare delle coniche spezzate rispettivamente nelle due rette AB e CD e nelle due rette AC e BD, poi si cerca la conica del fascio che passa per E
- Si conoscano 4 suoi punti A,B,C,D (a 3 a 3 non allineati) e la retta r tangente alla conica in uno di tali punti, ad es. A, (che non deve passare per i 3 restanti):
  - si scrive il fascio delle coniche per A,B,C, tangenti in A ad r, facendo le combinazione lineare delle coniche spezzate rispettivamente nelle rette AB e AC e nelle rette r e BC, poi si cerca la conica del fascio che passa per D
- Si conoscano 3 suoi punti A,B,C e le rette r ed s tangenti alla conica in r ed s rispettivamente in A e B (ovviamente r ed s non passano per i restanti punti):
  - si scrive il fascio delle coniche per A,B, tangenti in A ad r ed in B ad s, facendo le combinazione lineare delle coniche spezzate rispettivamente nella retta AB contata due volte e nelle rette r ed s, poi si cerca la conica del fascio che passa per C
- ……

Come determinare l'equazione di una circonferenza quando….

- Si conoscano 3 suoi punti A,B,C (non allineati):
  - si scrive il fascio di circonferenze per A,B, facendo le combinazione lineare della retta AB (asse radicale), con la circonferenza di diametro AB, poi si cerca la circonferenza del fascio che passa per C
- Si conoscano 2 suoi punti A,B e la retta r tangente in uno di essi, ad esempio A, (che non passa per l'altro):
  - si scrive il fascio di circonferenze tangente in A ad r, facendo le combinazione lineare della retta r (asse radicale), con la circonferenza di centro A e raggio 0 e poi si cerca la circonferenza del fascio che passa per B
- ….

Riassumendo

Dopo aver ricordato nozioni sulle coniche imparate alle scuole superiori abbiamo visto

- Cosa è una conica nel piano,
- Come riportarla alle forme canoniche già note,
- Come classificare e riconoscere le coniche,
- Come trovare i loro assi e l'eventuale centro,
- Cosa è un fascio di coniche,
- Come scrivere l'equazione di una conica quando sono date le condizioni per determinarla.