CAMBIAMENTI DI BASE

Componenti di un vettore rispetto ad una base e matrici di passaggio tra due basi.
Formula del cambiamento di base per le componenti di un vettore.
Formula del cambiamento di base per la matrice di applicazioni lineari ed endomorfismi.

Esercizio 1 *Si consideri l'insieme di vettori di* $\mathbb{R}^3$ *dato da*

$$\mathcal{B} = \{X_1 = (1,1,2)\,,\ X_2 = (2,-1,1),\ X_3 = (3,1,2)\}\,.$$

1) *Si verifichi che* $\mathcal{B}$ *è una base di* $\mathbb{R}^3$ *e si determinino le componenti* $[X]_{\mathcal{B}}$ *del vettore* $X = (0,1,3)$ *rispetto a* $\mathcal{B}$.

2) *Si determinino un vettore* $Y \in \mathbb{R}^3$ *tale che* $[Y]_{\mathcal{B}} = X$ *ed una base* $\mathcal{B}_0$ *di* $\mathbb{R}^3$ *tale che* $[X]_{\mathcal{B}_0} = (1,1,1)$.

3) *Si calcolino le matrici di passaggio* $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ e $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ *dalla base canonica* $\mathcal{C}$ *di* $\mathbb{R}^3$ *a* $\mathcal{B}$ *e viceversa.*

4) *Si verifichi che* $\mathcal{B}' = \{(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^3$ *e si calcolino* $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ *e* $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

Esercizio 2 *Si consideri l'applicazione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definita da* $f(x,y) = (x+2y, x-y)$.

1) *Si verifichi che* f *è un endomorfismo di* $\mathbb{R}^2$.

2) *Si determini la matrice* $M_f^{\mathcal{C}}$ *associata ad* f *rispetto alla base canonica* $\mathcal{C}$ *in partenza e in arrivo. Si ripeta l'esercizio determinando la matrice* $M_f^{\mathcal{B}}$ *rispetto alla base* $\mathcal{B} = \{X_1 = (2,-1),\ X_2 = (1,1)\}$.

Esercizio 3 *Sia* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *l'endomorfismo di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{B} = ((1,1,1),(0,1,1),(0,-1,1))$ *di* $\mathbb{R}^3$. *Scrivere la matrice* $M_f^{\mathcal{C}}$ *di* f *rispetto alla base canonica* $\mathcal{C}$ *di* $\mathbb{R}^3$ *e determinare* $\ker f$ *ed* $\operatorname{im} f$.

Esercizio 4 *Si consideri l'applicazione lineare* $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ *definita dalle condizioni*

$$f(1+x) = 1, \quad f(1+x^2) = 1+x, \quad f(x+x^2) = x.$$

1) *Calcolare le matrici di* f *rispetto alle basi* $\mathcal{B} = (1+x+x^2, 1+x^2, x+x^2)$ *di* $\mathbb{R}_2[x]$ *e* $\mathcal{B}' = (1+x, 1-x)$ *di* $\mathbb{R}_1[x]$ *e rispetto alle basi canoniche di* $\mathbb{R}_2[x]$ *ed* $\mathbb{R}_1[x]$.

2) *Verificare la formula del cambio di base per la matrice di un'applicazione lineare.*

3) *Studiare l'applicazione* f.

SVOLGIMENTI

Esercizio 1 *1)* La matrice dei vettori X_1, X_2, X_3 (rispetto alla base canonica) ha determinante non nullo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

e quindi X_1, X_2, X_3 sono linearmente indipendenti. Siccome sono tanti vettori quanti la dimensione di $\mathbb{R}^3$, essi costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$.
Per calcolare le componenti $[X]_{\mathcal{B}}$ possiamo procedere in due modi: (i) usare la definizione di componenti di X rispetto $\mathcal{B}$; (ii) usare la formula del cambiamento di base per le componenti. Vediamoli entrambi, sebbene il secondo risulti in questo caso più laborioso.

(i) Per definizione di componenti di X rispetto $\mathcal{B}$, si ha $[X]_{\mathcal{B}} = (c_1, c_2, c_3)$ dove $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ sono gli unici coefficienti per cui $c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 = X$. Questo significa

$$c_1(1,1,2) + c_2(2,-1,1) + c_3(3,1,2) = (0,1,3),$$

ossia equivale a risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0 \\ c_1 - c_2 + c_3 = 1 \\ 2c_1 + c_2 + 2c_3 = 3 \end{cases}.$$

A conti fatti, risulta $c_1 = \frac{7}{3}$, $c_2 = \frac{1}{3}$ e $c_3 = -1$, cioè $[X]_{\mathcal{B}} = \left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, -1\right)$.

(ii) Usiamo la formula del cambiamento di base per le componenti: per ogni coppia di basi $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ si ha $[X]^T_{\mathcal{B}_1} = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}\,[X]^T_{\mathcal{B}_2}$, dove $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ è la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}_1$ alla base $\mathcal{B}_2$, cioè la matrice che si ottiene disponendo sulle colonne le componenti rispetto a $\mathcal{B}_1$ dei vettori di $\mathcal{B}_2$.
Poiché conosciamo le componenti rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$ sia di X che dei vettori di $\mathcal{B}$, cioè $[X]_{\mathcal{C}} = X = (0,1,3)$ e

$$[X_1]_{\mathcal{C}} = X_1 = (1,1,2)\,, \quad [X_2]_{\mathcal{C}} = X_2 = (2,-1,1)\,, \quad [X_3]_{\mathcal{C}} = X_3 = (3,1,2)\,,$$

abbiamo

$$P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e risulta $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\,[X]^T_{\mathcal{B}} = [X]^T_{\mathcal{C}} = (0,1,3)^T$, ossia $[X]^T_{\mathcal{B}} = P^{-1}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\,(0,1,3)^T$. Calcolando $P^{-1}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$, si trova

$$P^{-1}_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

e dunque si ottiene

$$[X]^T_{\mathcal{B}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 1/3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2) Per definizione di componenti, $[Y]_{\mathcal{B}} = (0,1,3)$ significa

$$Y = 0X_1 + 1X_2 + 3X_3 = (2,-1,1) + 3\,(3,1,2) = (11,2,7)\,.$$

Per definizione di componenti $[X]_{\mathcal{B}_0} = (1,1,1)$, la base $\mathcal{B}_0 = (Y_1, Y_2, Y_3)$ deve essere tale che $X = Y_1 + Y_2 + Y_3$, cioè dobbiamo trovare 3 vettori linearmente indipendenti la cui somma sia $(0,1,3)$. Per esempio possiamo scegliere i primi 2 vettori della base canonica come Y_1, Y_2 ed Y_3 il terzo in modo che siano soddisfatte le condizioni richieste: si ottiene

$$\mathcal{B}_0 = ((1,0,0),(0,1,0),(-1,0,3))\,.$$

3) Ricordando che per ogni coppia di basi $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ si ha $P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} = P^{-1}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$, entrambe le matrici sono già state calcolate al punto *1)*:

$$P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = P^{-1}_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

4) Si procede come al punto *1)*. Il determinante della matrice dei vettori di $\mathcal{B}'$ è

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

per cui $\mathcal{B}'$ (che ha 3 elementi) è una base di $\mathbb{R}^3$.
Per scrivere $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$, servono le componenti dei vettori di $\mathcal{B}$ rispetto a $\mathcal{B}'$; calcolandole come in (i) (ad esempio le componenti $[X_1]_{\mathcal{B}'} = (c_1, c_2, c_3)$ si ottengono risolvendo il sistema $c_1(1,0,1) + c_2(1,1,0) + c_3(1,1,1) = (1,1,2)$), si trova

$$[X_1]_{\mathcal{B}'} = (0,-1,2), \quad [X_2]_{\mathcal{B}'} = (3,1,-2), \quad [X_3]_{\mathcal{B}'} = (1,2,0).$$

Dunque

$$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

e, a conti fatti,

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P^{-1}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 4 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2 *1)* Si tratta di verificare che f è lineare, il che è chiaramente vero, in quanto le componenti di $f\,(x,y) = (x+2y, x-y)$ sono polinomi lineari omogenei nelle variabili x, y.

2) La matrice associata ad un endomorfismo rispetto ad una base qualsiasi $\mathcal{B}$ è la matrice le cui colonne sono le componenti rispetto a $\mathcal{B}$ delle immagini tramite l'endomorfismo dei

vettori di $\mathcal{B}$ stessi.
Considerando la base canonica $\mathcal{C} = \{(1,0),(0,1)\}$, si ha

$$f(1,0) = (1,1) \quad \text{ed} \quad f(0,1) = (2,-1),$$

per cui si ottiene

$$M_f^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Considerando la base $\mathcal{B} = \{X_1 = (2,-1),\ X_2 = (1,1)\}$, possiamo procedere nei due modi seguenti.

(i) Si ha

$$f(X_1) = (0,3) \quad \text{ed} \quad f(X_2) = (3,0),$$

ma per scrivere $M_f^{\mathcal{B}}$ ci servono le componenti di $f(X_1), f(X_2)$ rispetto a $\mathcal{B}$ (mentre $(0,3)$ e $(3,0)$ sono le loro componenti rispetto alla base canonica). Risolvendo il sistema $c_1X_1 + c_1X_2 = (0,3)$ si trova $(c_1,c_2) = (-1,2)$, mentre il sistema $c_1X_1 + c_1X_2 = (3,0)$ fornisce $(c_1,c_2) = (1,1)$. Dunque

$$f(X_1) = -X_1 + 2X_2 \quad \text{ed} \quad f(X_2) = X_1 + X_2$$

(cioè $[f(X_1)]_{\mathcal{B}} = (-1,2)$ ed $[f(X_2)]_{\mathcal{B}} = (1,1)$) e pertanto

$$M_f^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Le matrici $M_f^{\mathcal{B}_1}$, $M_f^{\mathcal{B}_2}$ dello stesso endomorfismo f rispetto a due basi qualsiasi $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ sono legate dalla relazione

$$M_f^{\mathcal{B}_2} = P^{-1} M_f^{\mathcal{B}_1} P,$$

dove $P = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ è la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}_1$ alla base $\mathcal{B}_2$ (e $P^{-1} = P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}$ è la matrice di passaggio da $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$).
Nel caso in questione, $M_f^{\mathcal{C}}$ è già stata calcolata in (1) e si ha $M_f^{\mathcal{B}} = P^{-1} M_f^{\mathcal{C}} P$ con $P = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ matrice di passaggio dalla base canonica $\mathcal{C}$ alla base $\mathcal{B}$. Quest'ultima è subito data da

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

da cui si calcola

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$M_f^{\mathcal{B}} = P^{-1} M_f^{\mathcal{C}} P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3 Per procurarci la matrice $M_f^{\mathcal{C}}$ di f rispetto alla base canonica

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{i} = (1,0,0)\,,\ \mathbf{j} = (0,1,0),\ \mathbf{k} = (0,0,1)\}$$

di $\mathbb{R}^3$, possiamo determinare le componenti rispetto a $\mathcal{C}$ di $f(\mathbf{i})$, $f(\mathbf{j})$ ed $f(\mathbf{k})$ (da mettere poi sulle colonne di $M_f^{\mathcal{C}}$), oppure usare la formula del cambio di base per la matrice di un endomorfismo. Vediamo entrambi i procedimenti.

(i) *(tramite definizione di $M_f^{\mathcal{C}}$)* Avendo la matrice di f rispetto a $\mathcal{B}$ (la matrice A del testo), sappiamo che

$$\begin{aligned} f(1,1,1) &= 1(1,1,1) + 2(0,1,1) + 3(0,-1,1) = (1,0,6), \\ f(0,1,1) &= 0(1,1,1) - 1(0,1,1) - 2(0,-1,1) = (0,1,-3), \\ f(0,-1,1) &= 1(1,1,1) + 1(0,1,1) + 1(0,-1,1) = (1,1,3), \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned} f(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) &= (1,0,6), \\ f(\mathbf{j}+\mathbf{k}) &= (0,1,-3), \\ f(-\mathbf{j}+\mathbf{k}) &= (1,1,3). \end{aligned}$$

Per la linearità di f, ciò significa

$$\begin{cases} f(\mathbf{i}) + f(\mathbf{j}) + f(\mathbf{k}) = (1,0,6) \\ f(\mathbf{j}) + f(\mathbf{k}) = (0,1,-3) \\ -f(\mathbf{j}) + f(\mathbf{k}) = (1,1,3) \end{cases}$$

e quindi, risolvendo rispetto alle incognite $f(\mathbf{i})$, $f(\mathbf{j})$, $f(\mathbf{k})$, si ottiene:

$$\begin{cases} f(\mathbf{i}) + f(\mathbf{j}) + f(\mathbf{k}) = (1,0,6) \\ f(\mathbf{j}) + f(\mathbf{k}) = (0,1,-3) \\ f(\mathbf{k}) = f(\mathbf{j}) + (1,1,3) \end{cases} \begin{cases} - \\ 2f(\mathbf{j}) + (1,1,3) = (0,1,-3) \\ - \end{cases} \begin{cases} - \\ f(\mathbf{j}) = \left(-\frac{1}{2},0,-3\right) \\ f(\mathbf{k}) = \left(\frac{1}{2},1,0\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(\mathbf{i}) + \left(-\frac{1}{2},0,-3\right) + \left(\frac{1}{2},1,0\right) = (1,0,6) \\ - \\ - \end{cases} \begin{cases} f(\mathbf{i}) = (1,-1,9) \\ f(\mathbf{j}) = \left(-\frac{1}{2},0,-3\right) \\ f(\mathbf{k}) = \left(\frac{1}{2},1,0\right) \end{cases}.$$

Dunque

$$M_f^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ 9 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) *(tramite matrice di passaggio)* Usando la formula del cambio di base per la matrice di un endomorfismo, si ha:

$$M_f^{\mathcal{C}} = P^{-1} M_f^{\mathcal{B}} P,$$

dove $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ è la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{C}$ ed $M_f^{\mathcal{B}}$ è la matrice di f rispetto a $\mathcal{B}$. Quest'ultima è la matrice A data nel testo, quindi restano da calcolare P e P^{-1}. Siccome abbiamo già le componenti dei vettori di $\mathcal{B} =$

$((1,1,1),(0,1,1),(0,-1,1))$ rispetto a $\mathcal{C}$, possiamo scrivere subito $P^{-1} = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ (matrice di passaggio da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$) e poi calcolare $P = \left(P^{-1}\right)^{-1}$. Si ha

$$P^{-1} = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e, a conti fatti, risulta

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$M_f^{\mathcal{C}} = P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ 9 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Avendo la matrice di f rispetto alla base canonica, possiamo calcolare $\ker f$ ed $\operatorname{im} f$ facilmente:

- $\ker f$ coincide con il sottospazio delle soluzioni del sistema
$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ 9 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$
si trova $\ker f = \mathcal{L}(1,3,1)$ e quindi $\dim \ker f = 1$;
- $\operatorname{im} f$ è il sottospazio generato dalle colonne di $M_f^{\mathcal{C}}$ ed ha dimensione 2 per il teorema del rango, per cui ha per base una qualsiasi coppia di colonne linearmente indipendenti di $M_f^{\mathcal{C}}$, ad esempio $\operatorname{im} f = \mathcal{L}((1,-1,9),(1/2,1,0))$.

Esercizio 4 Controlliamo innanzitutto se l'applicazione f è univocamente assegnata, cioè se dalle condizioni imposte risultano fissati valori di f su una base della spazio di partenza. Si tratta quindi di verificare se $(1+x, 1+x^2, x+x^2)$ è una base di $\mathbb{R}_2[x]$. Se indichiamo con $\mathcal{C}$ la base canonica di $R_2[x]$ (cioè $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$), si ha

$$[1+x]_{\mathcal{C}} = (1,1,0), \quad \left[1+x^2\right]_{\mathcal{C}} = (1,0,1), \quad \left[x+x^2\right]_{\mathcal{C}} = (0,1,1),$$

per cui la matrice dei vettori $1+x, 1+x^2, x+x^2$ rispetto a $\mathcal{C}$ ha determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

e pertanto i tre vettori sono linearmente indipendenti. Essendo tanti quanti la dimensione di $R_2[x]$, essi formano una base di $R_2[x]$ e quindi l'applicazione f è ben definita.

1) Conviene procurarsi prima la matrice $M_f^{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ di f rispetto alle basi canoniche $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$ e $\mathcal{C}' = \{1, x\}$ di $\mathbb{R}_2[x]$ ed $\mathbb{R}_1[x]$. Per questo, dobbiamo calcolare le componenti dei vettori $f(1), f(x), f(x^2)$ rispetto alla base $\mathcal{C}'$ (da mettere poi sulle colonne di $M_f^{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$). Usando la linearità di f, dalle condizioni

$$f(1+x) = 1, \quad f(1+x^2) = 1+x, \quad f(x+x^2) = x$$

imposte dal testo deduciamo

$$\begin{cases} f(1) + f(x) = 1 \\ f(1) + f(x^2) = 1+x \\ f(x) + f(x^2) = x \end{cases}$$

e quindi, risolvendo rispetto alle incognite $f(1), f(x), f(x^2)$, si ottiene:

$$\begin{cases} f(1) + f(x) = 1 \\ f(1) + f(x^2) = 1+x \\ f(x) + f(x^2) = x \end{cases} \begin{cases} f(x) = 1 - f(1) \\ f(x^2) = 1 + x - f(1) \\ 1 - f(1) + 1 + x - f(1) = x \end{cases} \begin{cases} - \\ - \\ f(1) = 1 \end{cases} \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x^2) = x \\ f(1) = 1 \end{cases}.$$

Dunque

$$f(1) = 1(1) + 0(x), \quad f(x) = 0(1) + 0(x), \quad f(x^2) = 0(1) + 1(x),$$

cioè

$$[f(1)]_{\mathcal{C}'} = (1,0), \quad [f(x)]_{\mathcal{C}'} = (0,0), \quad [f(x^2)]_{\mathcal{C}'} = (0,1),$$

e perciò

$$M_f^{\mathcal{C},\mathcal{C}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per calcolare la matrice $M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ di f rispetto alle basi $\mathcal{B} = (1+x+x^2, 1+x^2, x+x^2)$ e $\mathcal{B}' = (1+x, 1-x)$, dobbiamo calcolare le componenti dei vettori $f(1+x+x^2)$, $f(1+x^2)$, $f(x+x^2)$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$. Conoscendo $f(1), f(x), f(x^2)$ ed usando la linearità di f, si ottiene subito

$$\begin{aligned} f(1+x+x^2) &= f(1) + f(x) + f(x^2) = 1+x, \\ f(1+x^2) &= f(1) + f(x^2) = 1+x, \\ f(x+x^2) &= f(x) + f(x^2) = x, \end{aligned}$$

i quali vanno ora decomposti rispetto a $\mathcal{B}'$: ovviamente si ha subito

$$f(1+x+x^2) = f(1+x^2) = 1+x = 1(1+x) + 0(1-x),$$

mentre ponendo $x = c_1(1+x) + c_2(1-x)$, si trova $x = c_1 + c_1x + c_2 - c_2x$, cioè $x = c_1 + c_2 + (c_1 - c_2)x$, che equivale a

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 1 \end{cases},$$

ossia $c_1 = \frac{1}{2}$ e $c_2 = -\frac{1}{2}$; dunque $f\left(x+x^2\right) = x = \frac{1}{2}(1+x) - \frac{1}{2}(1-x)$ e pertanto si conclude

$$\left[f\left(1+x+x^2\right)\right]_{\mathcal{B}'} = \left[f\left(1+x^2\right)\right]_{\mathcal{B}'} = (1,0), \quad \left[f\left(x+x^2\right)\right]_{\mathcal{B}'} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

In definitiva risulta

$$M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

2) La formula del cambio di base per la matrice di f è

$$M_f^{\mathcal{C},\mathcal{C}'} = Q^{-1} M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}'} P$$

dove P è la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{C}$ (nello spazio $\mathbb{R}_2[x]$) e Q è la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}'$ alla base $\mathcal{C}'$ (nello spazio $\mathbb{R}_1[x]$).
Poiché è più facile decomporre i vettori di $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ rispetto alle basi canoniche, piuttosto che viceversa, conviene calcolare $Q^{-1} = P_{\mathcal{C}',\mathcal{B}'}$ e $P^{-1} = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ ed invertire poi la seconda, piuttosto che calcolare Q e P. Essendo

$$\left[1+x+x^2\right]_{\mathcal{C}} = (1,1,1), \quad \left[1+x^2\right]_{\mathcal{C}} = (1,0,1), \quad \left[x+x^2\right]_{\mathcal{C}} = (0,1,1)$$

e

$$[1+x]_{\mathcal{C}'} = (1,1), \quad [1-x]_{\mathcal{C}'} = (1,-1),$$

si ha

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

da cui, invertendo, risulta

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo dunque verificare che

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eseguendo il prodotto a secondo membro, si vede che il risultato coincide con il primo membro e quindi l'uguaglianza è verificata.

3) Per studiare f è comodo usare la matrice $M_f^{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$ rispetto alle basi canoniche, ovvero le uguaglianze

$$f(1) = 1, \quad f(x) = 0, \quad f\left(x^2\right) = x.$$

Poiché $f(x)$ è nullo, l'immagine di f è generata dai soli vettori $f(1) = 1, f(x^2) = x$, che sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base di $\operatorname{im} f$. Dunque $\operatorname{im} f = \mathcal{L}(1,x) = \mathbb{R}_1[x]$ ed f risulta suriettiva. Per il teorema del rango, $\ker f$ ha allora dimensione 1 e, poiché $x \in \ker f$ (per definizione di nucleo, in quanto $f(x) = 0$) risulta $\ker f = \mathcal{L}(x)$.